ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. С. Парсаданян

Унитарные совокупности операторов и их аналитическая характеристика в пространстве $L_2(a, b)$.

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/VI 1982)

В работе [1] М. М. Джрбашяном введено понятие унитарной пары операторов в абстрактном гильбертовом пространстве H, которое является качественно новым обобщением понятия унитарного оператора. Там же дана их аналитическая характеристика в гильбертовом пространстве функций $L_2(a, b)$, и в качестве специального случая известная теорема Бохнера.

В настоящей работе получены аналогичные результаты для унитарной совокупности операторов.

1. Пусть в абстрактном гильбертовом пространстве H определены n линейных ограниченных операторов $U_1, U_2, \ldots, U_n$ с областями значений $\Delta_k = U_k H \subseteq H$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и пусть $U_1^*, U_2^*, \ldots, U_n^*$— соответствующие сопряженные операторы.

Конечное множество операторов $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ назовем унитарной совокупностью, если для произвольных f и g из H выполняются условия

$$(U_k^* f, U_j^* g) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ (f, g), & k=j \end{cases} \quad (k, j=1, 2, \ldots, n-1) \ (n \geqslant 2); \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (U_k f, U_k g) = (f, g), \tag{2}$$

где (f, g)—скалярное произведение пространства H.

Класс всех таких унитарных совокупностей обозначим через $U^{(n)}(H)$. Легко видеть, что условия (1) и (2) соответственно эквивалентны следующим:

$$U_k U_j^* = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k=j \end{cases} \quad (k, j=1, 2, \ldots, n-1) \quad (n \geqslant 2); \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^* U_k = I, \tag{4}$$

где 0—нулевой, а I—единичный операторы H.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in U^{(n)}(H)$. *Тогда*

1°) *операторы* $P_k = U_k^* U_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *осуществляют проек-*

тирование пространства H на подпространства $H_k (k=1, 2, \ldots, n)$, так что

$$\sum_{k=1}^{n} \oplus H_k = H;$$

2°) *для любых элементов f и g из $\Delta_n = U_n H$ справедливо равенство*

$$(U_n^* f, U_n^* g) = (f, g).$$

Доказательство. В самом деле, по (3) имеем

$$P_k^* = P_k (k=1, 2, \ldots, n), \quad P_k P_j = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k=j \end{cases} \quad (k, j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

т. е. $P_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$ — ортопроекторы, отображающие пространство H на некоторые подпространства $H_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$. В силу (5) подпространства $H_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$ попарно ортогональны и, следовательно, оператор $\sum_{k=1}^{n-1} P_k$ проектирует пространство H на подпространство $\sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ (см. ([2]), с. 285—289).

Оператор $P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$ — также проекционный и отображает пространство H на подпространство $H_n = H \ominus \sum_{k=1}^{n-1} \oplus H_k$ и, следовательно, пункт 1° доказан.

Так как $I = \sum_{k=1}^{n} P_k$, то, имея в виду (5), для произвольных элементов F и G из H имеем

$$(F, G) = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k F, \sum_{k=1}^{n} P_k G \right) = \sum_{k=1}^{n} (P_k F, P_k G).$$

Пользуясь (1) и (2), получим

$$(U_n^* U_n F, U_n^* U_n G) = (U_n F, U_n G),$$

и так как $f = U_n F \in \Delta_n$, $g = U_n G \in \Delta_n$ произвольны, то наше утверждение доказано.

Лемма 2. *Пусть линейные ограниченные операторы $U_k (k=1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяют условиям (1). Тогда существует линейный ограниченный оператор U_n (единственный среди положительных и самосопряженных операторов) такой, что $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \in U_{(n)}(H)$.*

Доказательство. Действительно, при условии (3) операторы

$$P_k = U_k^* U_k (k=1, 2, \ldots, n-1), \quad P_n = I - \sum_{k=1}^{n-1} P_k$$

являются попарно ортогональными проекционными операторами. Следовательно

$$P_n^2 = P_n, \; P_n^* = P_n, \; (P_n f, f) = (P_n^2 f, f) = (P_n f, P_n f) \geqslant 0,$$

т. е. оператор P_n самосопряженный и положительный. А это значит, что существует единственный положительный самосопряженный квадратный корень $U_n=P_n^{\frac{1}{2}}$ (см. [2], с. 284). Оператор U_n будет искомым.

Таким образом, если операторы $U_k(k=1, 2, \ldots, n-1)$ не унитарны, то при условии (3) допускают „пополнение" в совокупности посредством другого оператора U_n, составляющего совместно с ними унитарную совокупность.

2. Обозначим через $L_2(a, b)$ пространство всех измеримых и суммируемых с квадратом модуля на (a, b) функций, где $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. Для пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a, b)$ определим скалярное произведение

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

и норму $\|f\|$ элемента $f\in L_2(a, b)$ как $\|f\|=(f, f)^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что множество функций $L_2(a, b)$ с принятым нами определением скалярного произведения представляет собой полное сепарабельное гильбертово пространство.

Определим функцию $l_\zeta(x)$, зависящую от параметра $\zeta\neq0$, следующим образом:

$$l_\zeta(x)=\begin{cases}1, & x\in[0, \zeta)\\ 0, & x\notin[0, \zeta)\end{cases}\ \zeta>0,\quad l_\zeta(x)=\begin{cases}-1, & x\in[\zeta, 0)\\ \ \ 0, & x\notin[\zeta, 0)\end{cases}\ \zeta<0, \tag{6}$$

и с целью упрощения формулировок предположим, что $x=0$ есть внутренняя или граничная точка интервала (a, b).

В следующей теореме дается аналитическая характеристика унитарных совокупностей операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$.

Теорема 1. *Любой унитарной совокупности операторов* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}\in U^{(n)}(H)$, *действующей в пространстве* $H=L_2(a, b)$ *соответствуют* $2n$ *функций*

$$K_k(\zeta, x)=U_k l_\zeta(x),\quad K_k^*(\zeta, x)=U_k^* l_\zeta(x),\quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

принадлежащих этому пространству при каждом фиксированном $\zeta\in(a, b)$ *и обладающих тем свойством, что соответствие*

$$g_k=U_k f\ (k=1, 2, \ldots, n),\quad f=\sum_{k=1}^n U_k^* g_k \tag{8}$$

осуществляется посредством формул

$$\int_0^\zeta g_k(x)dx=\int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)}\, f(x)dx\quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

$$\int_0^\zeta f(x)dx=\sum_{k=1}^n\int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)}\, g_k(x)dx. \tag{10}$$

Кроме того, функции (7) удовлетворяют условиям:

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{n}\int_a^b \overline{K_k(\zeta, x)}K_k(\eta, x)dx=\int_a^b l_\zeta(x)l_\eta(x)dx=\begin{cases}\min(|\zeta|, |\eta|), & \zeta\eta\geqslant 0\\ 0, & \zeta\eta<0\end{cases};$$

$$\text{б)}\ \int_a^b K_k^*(\zeta, x)K_j^*(\eta, x)dx=\begin{cases}0, & k\neq j\\ \int_a^b l_\zeta(x)l_\eta(x)dx, & k=j\end{cases}\quad (k, j=1, 2, \ldots, n-1);$$

$$\text{в)}\ \int_0^\eta K_k(\zeta, x)dx=\int_0^\zeta \overline{K_k^*(\eta, x)}dx \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Обратно, всякие $2n$ *функций* $K_k(\zeta, x)$, $K_k^*(\zeta, x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, *обладающие свойствами* а), б) *и* в), *порождают согласно формулам* (9) *и* (10) *некоторую унитарную совокупность операторов* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, *связанную с этими функциями формулами* (7).

Доказательство первой половины теоремы. Пусть справедливы (7) и (8). Тогда легко видеть, что

$$(g_k, l_\zeta)=(U_kf, l_\zeta)=(f, U_k^*l_\zeta)\quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

$$(f, l_\zeta)=\left(\sum_{k=1}^{n}U_k^*g_k, l_\zeta\right)=\sum_{k=1}^{n}(U_k^*g_k, l_\zeta)=\sum_{k=1}^{n}(g_k, U_kl_\zeta),$$

из которых следует формула (9) и (10).

Докажем, что функции (7) удовлетворяют также условиям а), б) и в). Пусть $f=l_\eta$, тогда $g_k=U_kl_\eta$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. В силу (2) и (8) можем написать

$$(l_\eta, l_\zeta)=(f, l_\zeta)=\left(\sum_{k=1}^{n}U_k^*g_k, l_\zeta\right)=\sum_{k=1}^{n}(U_k^*g_k, l_\zeta)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(g_k, U_kl_\zeta)=\sum_{k=1}^{n}(U_kl_\eta, U_kl_\zeta)$$

и, пользуясь обозначениями (7), убедимся в истинности а).

Подставляя в (1) $f=l_\eta$, $g=l_\zeta$, будем иметь

$$(U_k^*l_\eta, U_j^*l_\zeta)=\begin{cases}0, & k\neq j\\ (l_\eta, l_\zeta) & k=j\end{cases}(k, j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Пользуясь обозначениями (7), получаем б).

Из определения сопряженного оператора имеем, что

$$(U_kl_\zeta, l_\eta)=(l_\zeta, U_k^*l_\eta)\quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

и имея в виду также (7), получаем в).

Доказательство второй половины теоремы. Определим операторы U_k и $V_k (k=1, 2, \ldots, n)$ следующим образом:

$$K_k(\zeta, x)=U_kl_\zeta(x),\quad K_k^*(\zeta, x)=U_k^*l_\zeta(x)\quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Условия а), б) и в) нам дают

а′) $\sum_{k=1}^{n}(U_k l_\eta, U_k l_\zeta)=(l_\eta, l_\zeta)$;

б′) $(V_k l_\eta, V_j l_\zeta)=\begin{cases}0, & k\neq j\\ (l_\eta, l_\zeta), & k=j\end{cases}$ $(k, j=1, 2, \ldots, n-1)$;

в′) $(U_k l_\zeta, l_\eta)=(l_\zeta, V_k l_\eta)$ $\quad (k=1, 2, \ldots, n)$.

Пусть теперь $f(x)$—какая-нибудь ступенчатая функция. Ее можно представить, причем единственным образом, в виде линейной комбинации функции $l_\zeta(x)$. Тогда $U_k f$ и $V_k f$ можно будет определить как линейные комбинации соответствующих $U_k l_\zeta$ и $V_k l_\zeta$, взятых с теми же коэффициентами. Соотношения а′), б′) и в′). распространяются при этом на произвольные ступенчатые функции f и g:

а″) $\sum_{k=1}^{n}(U_k f, U_k g)=(f, g)$;

б″) $(V_k f, V_j g)=\begin{cases}0, & k\neq j\\ (f, g), & k=j\end{cases}$ $(k, j=1, 2, \ldots, n-1)$;

в″) $(U_k f, g)=(f, V_k g)$ $\quad (k=1, 2, \ldots, n)$.

Поскольку $L_2(a, b)$ полно и множество ступенчатых функций плотно в $L_2(a, b)$, то с помощью а″), б″) и в″) операторы U_k и V_k можно единственным образом распространить на все $L_2(a, b)$. В силу непрерывности скалярного произведения на $L_2(a, b)$ сохраняются формулы а), б) и в). Известно (см. ([3])), что если функция $R(\zeta, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_a^b \overline{R(\zeta, x)}\, R(\eta, x)dx=\int_a^b l_\zeta(x)l_\eta(x)dx, \quad \zeta, \eta\in(a, b)$$

и кроме того полна, т. е. из

$$\int_a^b R(\zeta, x)\,\overline{f(x)}dx=0, \quad \zeta\in(a, b),$$

где $f(x)\in L_2(a, b)$, следует, что $f(x)\equiv 0$, то $R(\zeta, x)$ является ядром некоторого унитарного оператора.

При снятии условия полноты ядер $K_k^*(\zeta, x)(k=1, 2, \ldots, n-1)$ из утверждения б) согласно теореме 1 следует:

Теорема 2. *Пусть функции* $K_k^*(\zeta, x)(k=1, 2, \ldots, n-1)$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\int_a^b \overline{K_k^*(\zeta, x)}K_j^*(\eta, x)dx = \begin{cases}0, & k\neq j\\ \int_a^b l_\zeta(x)l_\eta(x)dx, & k=j\end{cases} \quad (k, j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Тогда существуют единственные функции $K_k(\zeta, x)(k=1, 2, \ldots, n-1)$ *и функции* $K_n(\zeta, x)$, $K_n^*(\zeta, x)$, *которые совместно с функциями* $K_k^*(\zeta, x)(k=1, 2, \ldots, n-1)$ *удовлетворяют условиям* а) *и* в) *теоре-*

мы 1, *порождая, таким образом, некоторую унитарную совокупность операторов* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ *в* $L_2(a, b)$, *согласно формулам* (9) *и* (10).

Функции $K_n(\zeta, x)$ *и* $K_n^*(\zeta, x)$ *также единственны при условии*

$$K_n^*(\zeta, x) \equiv K_n(\zeta, x).$$

Эту теорему можно рассматривать как решение вопроса о пополнении в совокупности конечного числа неполных попарно ортогональных ядер.

В заключение выражаю благодарность академику АН АрмССР М. М. Джрбашяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Кафанский отдел Вычислительного центра
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ՓԱՐՍԱԴԱՆՅԱՆ

Օպերատորների ունիտար համախմբություններ և նրանց անալիտիկ բնութագրությունը $L_2(a, b)$-ում

Ներկա աշխատանքում մտցվում է օպերատորների ունիտար համախմբություն հասկացությունը հիլբերտյան տարածություններում։ Ստացված են ունիտար զույգերի $L_2(a, b)$*-ում անալիտիկ բնութագրության վերաբերյալ Մ. Մ. Ջրբաշյանի թեորեմին անալոգ արդյունքներ ունիտար համախմբությունների համար։ Ապացուցված է նաև թեորեմ, որով լուծվում է վերջավոր թվով ոչ լրիվ, զույգ առ զույգ օրթոգոնալ կորիզների ըստ համախմբության լրիվացման հարցը։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 141, № 2 (1961). [2] *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу, Мир, М., 1979. [3] *М. М. Джрбашян, Р. М. Мартиросян*, ДАН СССР, т. 132, № 5 (1960).