ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Б. Л. Голинский

Об одной экстремальной задаче и теорема Какейя

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/VI 1978)

Сформулируем теорему Какейя.

Существует единственный многочлен $R(z)$ *степени* $\leqslant 2n$, *удовлетворяющий следующим условиям:* 1) *он допускает представление* $R(z)=Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z)$, C—*пост.*, $r(z)=\prod_{k=1}^{m}(1-\bar{\alpha}_k z)$,

$$\tau(z)=\prod_{l=1}^{\nu}(z-\beta_l),\ \{|\alpha_k|\}_1^m<1,\ \{|\beta_l|\}_1^\nu\leqslant 1,\ \tau^*(z)=z^\nu\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right),\quad \nu=n-m, \quad (1)$$

т. е. некоторые его корни симметричны относительно окружности Γ *единичного радиуса с центром в точке* $z=0$, *остальные лежат вне* Γ *и в этом случае имеют четную кратность;* 2) *он подчинен одному из условий:* 2.1) *заданы его значения в точках* $\{\gamma_k\}_0^n$ *области* $|z|<1$, *т. е.* $R(\gamma_k)=\delta_k$, $\{|\gamma_k|\}_0^n<1$; 2.2) *заданы его младшие коэффициенты* $\{\mu_k\}_0^n$, *т. е.*

$$R(z)=\mu_0+\mu_1 z+\ldots+\mu_n z^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots+a_{2n}z^{2n}.$$

В формуле (1) фигурирует $n+1$ неизвестных величин: C, $\{\alpha_k\}_1^m$, $\{\beta_l\}_1^\nu$, для нахождения которых имеем $n+1$ условий 2.1) или 2.2). Отсюда, однако, не следует, что эта система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными (в общем случае нелинейная) допускает решение, и притом единственное.

Эта чисто алгебраическая теорема была впервые доказана С. Какейя ([1]) весьма сложно (с применением топологических методов). Непрямое доказательство теоремы Какейя при условии 2.2) дано Ф. Риссом ([2]), С. Такенака ([3]), Г. М. Голузиным ([4]). В настоящей заметке приведен также непрямой метод доказательства теоремы Какейя, однако один для обоих случаев 2.1) и 2.2) и, как нам кажется, проще вышеуказанных, а леммы 1, 2 и экстремальная задача, из которой следует теорема Какейя, представляют самостоятельный интерес.

1. Обозначим через S и H классы фукнций $\varphi(z)$ и $f(z)$, регулярные в области $|z|<1$ и удовлетворяющие в ней соответственно условиям: $|\varphi(re^{i\theta})|<1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$; $\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta<$ *пост.* для всех $r<1$.

Пусть $f(z)=\sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s$, $L(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}|f(\zeta)||d\zeta|=L(c_0, c_1, \ldots)$, $\overline{\arg} f(\zeta)=$

$$=\begin{cases}|f(\zeta)|:f(\zeta)=\overline{f(\zeta)}:|f(\zeta)| & \text{при } f(\zeta)\neq 0\\ 0 & \text{при } f(\zeta)=0.\end{cases}$$

Лемма 1. *Если* $F(z)=\sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s \in H$, *то граничное условие* $\zeta^n \overline{\arg} F(\zeta):=\varphi(\zeta)$, $\varphi(z)\in S$ *эквивалентно тому, что* $F(z)$*—многочлен степени* $\leqslant 2n$, $|z|<1$.

Доказательство. Пусть $F(z)$ имеет представление (1). Тогда

$$\overline{\arg}F(\zeta)=\frac{|C|}{C}\,\frac{\overline{r(\zeta)\tau(\zeta)}}{r(\zeta)\tau^*(\zeta)}=\frac{|C|}{C}\,\frac{r^*(\zeta)}{\zeta^n r(\zeta)}.$$

Так как $r^*(z)/r(z)\in S$ при $|z|<1$, то $\zeta^n\overline{\arg}\,F(\zeta)=\frac{|C|}{C}\,\frac{r^*(\zeta)}{r(\zeta)}$, $\varphi(z)=$ $=\frac{|C|}{C}\,\frac{r^*(z)}{r(z)}\in S$. Необходимость условия (1) доказана. Докажем его достаточность. Имеем $\zeta^n\overline{\arg}F(\zeta)=\zeta^n|F(\zeta)|F^{-1}(\zeta)=\varphi(\zeta)$, $\zeta^n|F(\zeta)|=F(\zeta)\varphi(\zeta)$. Ясно, что $\lambda(z):=F(z)\varphi(z)\in H$ и $\lambda(\zeta)=F(\zeta)\varphi(\zeta)$ должно удовлетворять условию (см. ([5]), с. 157): $\int_{\Gamma}\lambda(\zeta)\zeta^s d\zeta=\int_{\Gamma}\zeta^{n+s}|F(\zeta)|d\zeta=0$, $(s=0, 1, \ldots)$.

Отсюда вытекает, что при $\rho\geqslant n+1$ имеем $\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|e^{i\rho\theta}d\theta=0$, $\rho=n+1$, $n+2, \ldots$, т. е. $|F(e^{i\theta})|$—неотрицательная тригонометрическая сумма порядка $\leqslant n$. По теореме Фейера $|F(\zeta)|=|t(\zeta)|^2$, где $t(z)$—многочлен степени $\leqslant n$, $t(z)\neq 0$ при $|z|<1$. Мы имеем таким образом почти всюду (п. в.) на Γ

$$\zeta^n|F(\zeta)|=\zeta^n|t(\zeta)|^2=t(\zeta)t^*(\zeta)=\lambda(\zeta)=F(\zeta)\varphi(\zeta). \tag{2}$$

Так как функции $t(z)t^*(z)\in H$, $\lambda(z)\in H$, то они выражаются через свои граничные значения интегралом Коши (см. ([5]), с. 97) и равенство (2) справедливо в $|z|\leqslant 1$. По известному представлению В. И. Смирнова ([6]) имеем при $|z|<1$

$$F(z)=B_1(z)t^2(z)\psi_1(z),\ \varphi(z)=B_2(z)\psi_2(z), \tag{3}$$

где

$$\psi_j(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\sigma_j(\theta)\right\},\quad j=1, 2,$$

а $B_j(z)$—произведение Бляшке, $\sigma_j(\theta)$—невозрастающие на $[0, 2\pi]$ функции, причем $\sigma_j'(\theta)=0$ п. в. в $[0, 2\pi]$.

Мы имеем по (2) и (3) при $|z|<1$

$$\lambda(z)=t(z)t^*(z)=t^2(z)B(z)\psi(z),\ B(z)=B_1(z)B_2(z),\ \psi(z)=\psi_1(z)\psi_2(z).$$

Отсюда следует, что $\psi(z)\equiv 1$, $d\sigma_1(\theta)+d\sigma_2(\theta)=0$, $\sigma_j(\theta)=$пост., $j=1, 2$.

Значит

$$F(z)=t(z)t^*(z)\varphi^{-1}(z)=t(z)t^*(z)B_2^{-1}(z). \tag{4}$$

Так как функция $F(z)$ регулярна в $|z|<1$, то каждый нуль функции $B_2(z)$ должен быть одновременно нулем не меньшей кратности многочлена $t^*(z)$. Положим $B_2(z)=C_1\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}$, $t^*(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-\alpha_k)\prod_{i=1}^{\nu}(z-\beta_i)$. Тогда из (4) получим

$$F(z)=C\prod_{k=1}^{m}(z-\alpha_k)(1-\bar{\alpha}_k z)\prod_{k=1}^{\nu}(1-\bar{\beta}_i z)(z-\beta_i)\prod_{h=1}^{m}\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}=Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z)=$$

$$:=R(z),$$

т. е. представление (1).

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial L}{\partial b_s}=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \overline{\arg F(\zeta)\zeta^s}|d\zeta|,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

Доказательство. Применим метод Ф. Рисса ([2]). Для этого рассмотрим функцию $F_1(z)=F(z)+\Delta b_s z^s\in H(|z|<1)$. П. в. на Γ $F_1(\zeta)=$ $=F(\zeta)+\Delta b_s\zeta^s$. Положим $b_s=g_s+ih_s$ и рассмотрим сперва вещественные значения $\Delta b_s=\Delta g_s$. Обозначим $\nu_s(\theta)=\{|F_1(\zeta)|-|F(\zeta)|\}:\Delta g_s$. Тогда

$$\frac{\partial L(F)}{\partial b_s}=\lim_{\Delta g_s\to 0}\frac{L(F_1)-L(F)}{\Delta g_s}=\lim_{\Delta g_s\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu_s(\theta)d\theta. \tag{6}$$

Очевидно

$$\nu_s(\theta)=\frac{|F(\zeta)+\Delta g_s\zeta^s|^2-|F(\zeta)|^2}{\Delta g_s\{|F(\zeta)+\Delta g_s\zeta^s|+F(\zeta)\}}=\frac{\Delta g_s+2\mathrm{Re}\{\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{|F(\zeta)+\Delta g_s\zeta^s|+|F(\zeta)|}$$

и

$$\lim_{\Delta g_s\to 0}\nu_s(\theta)=\frac{\mathrm{Re}\{\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{|F(\zeta)|},\quad |\nu_s(\theta)|\leqslant\left|\frac{F_1(\zeta)-F(\zeta)}{\Delta g_s}\right|=1. \tag{7}$$

Применяя теорему Лебега о предельном переходе, (6) и (7), получим

$$\lim_{\Delta g_s\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu_s(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\mathrm{Re}\{\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{|F(\zeta)|}|d\zeta|=\frac{\partial L(F)}{\partial b_s}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь функцию $F_2(z)=-F(z)$ с коэффициентами $b_s^{(2)}=$ $=h_s-ig_s$. Имеем по (8)

$$\frac{\partial L(F_2)}{\partial h_s}=\frac{\partial L(F)}{\partial h_s}=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\mathrm{Re}\{\overline{F_2(\zeta)}\zeta^s\}}{|F_2(\zeta)|}|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\mathrm{Re}\{i\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{|F(\zeta)|}|d\zeta|. \tag{9}$$

Так как $g_s=\frac{b_s+\bar{b}_s}{2}$, $h_s=\frac{b_s-\bar{b}_s}{2i}$, то из (8) и (9) следует (5):

$$\frac{\partial L}{\partial b_s}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial L(F)}{\partial g_s}-i\frac{\partial L(F)}{\partial h_s}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{Re}\{\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}-i\mathrm{Re}\{i\overline{F(\zeta)}\zeta^s\}}{2|F(\zeta)|}|d\zeta|=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\overline{F(\zeta)}}{|F(\zeta)|}\zeta^s|d\zeta|=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\overline{\arg}\,F(\zeta)\zeta^s|d\zeta|.$$

2. Найти функцию $F(z)\in H$, минимизирующую функционал $L(F)$ при условии, что $F(z)$ удовлетворяет условиям 2.1) или 2.2).

Решение. Рассмотрим сначала условия 2.1). Введем многочлены

$$P(z)=\sum_{k=1}^{n}(z-\gamma_k),\ Q(z)=P(z)\prod_{k=0}^{n}\frac{\Delta_k}{P'(\gamma_k)(z-\gamma_k)},\ \Delta_k=F(\gamma_k),\ \{|\gamma_k|\}_0^n<1.$$

Очевидно $Q(\gamma_k)=\Delta_k$. Пусть $f(z)=\sum_{s=0}^{\infty}c_sz^s\in H$, $c_s=p_s+iq_s$, $F(z)=Q(z)+$ $+P(z)f(z)$. Имеем

$$L(F)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}|Q(\zeta)+P(\zeta)f(\zeta)|\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|P(\zeta)|\left|\frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)}+f(\zeta)\right|d\theta,\quad \zeta=e^{i\theta}.$$

Известно ([7]), что существует единственная экстремальная функция $\tilde{f}(z)\in H$, осуществляющая в метрике пространства $L^1(0,2\pi)$ наилучшее взвешенное с весом $|P(\zeta)|$ приближение заданной функции $-Q(\zeta)/P(\zeta)$. Введенная функция $F(z)$ минимизирует $L(F)$. Необходимые условия экстремума $L(F)$ таковы: $\frac{\partial L(F)}{\partial p_s}=\frac{\partial L(F)}{\partial q_s}=0$. Эти условия в силу (5) эквивалентны условиям:

$$\frac{\partial L(F)}{\partial c_s}=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\overline{\arg}\,F(\zeta)P(\zeta)\zeta^s|d\zeta|=0,\quad s=0,1,2,\ldots$$

Отсюда следует (см. ([5]), с. 97, 100), что п. в. на Γ

$$\zeta^{-1}\overline{\arg}F(\zeta)P(\zeta):=\varphi(\zeta)\in H.$$

Для функции $R(z)=F(z)[P^*(z)]^2\in H$ будем иметь при $\zeta\in\Gamma$

$$\overline{\arg}R(\zeta)=\overline{\arg}F(\zeta)\frac{|P^*(\zeta)|^2}{[P^*(\zeta)]^2}=\zeta^{-n-1}\overline{\arg}F(\zeta)\frac{P(\zeta)}{P^*(\zeta)},\ \zeta^n\overline{\arg}R(\zeta)=\zeta^{-1}\frac{P(\zeta)}{P^*(\zeta)}\overline{\arg}\,F(\zeta).$$

Так как $\varphi(z)\in H$, $|P^*(z)|\geqslant C_2>0$ при $|z|\leqslant 1$, то $\frac{\varphi(z)}{P^*(\zeta)}\in H$ и даже $\frac{\varphi(z)}{P^*(z)}\in S$, ибо п. в. на Γ $1=|\zeta^n\overline{\arg}R(\zeta)|=|\varphi(\zeta)/P^*(\zeta)|$. По лемме 1 имеем для $|z|<1$

$$R(z)=Cr^2(z)\tau(z)\tau^*(z),\ F(z)=\frac{R(z)}{[P^*(z)]^2}=C\left[\frac{r(z)}{P^*(z)}\right]^2\tau(z)\tau^*(z),\qquad(10)$$

причем $R(\gamma_k)=F(\gamma_k)[P^*(\gamma_k)]^2=\Delta_k[P^*(\gamma_k)]^2=\delta_k$, $k=0,1,2,\ldots,n$. Таким образом решение поставленной экстремальной задачи существует, оно единственное, (10) —его необходимая форма; следовательно, существует единственный многочлен $R(z)$ степени $\leqslant 2n$, имеющий форму (1) и удовлетворяющий условиям 2.1).

Для решения экстремальной задачи при условии 2.2) введем многочлены $P(z)=z^{n+1}$, $Q(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mu_k z^k$, величины $\{\mu_k\}_0^n$ заданы. Рассмотрим и теперь прежний вид функции $F(z)$. Повторяем прежние рассуждения и приходим к решению задачи Какейя при условии 2.2).

Приведенный метод доказательства теоремы Какейя представляет, как нам кажется, интерес также потому, что он устанавливает тождественность между многочленами определенного вида и видом экстремальных функций из класса H, на которых реализуется минимум функционала $L(F)=\int\limits_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})|d\theta$ при условиях 2.1) и 2.2).

Харьковский ордена В. И. Ленина
авиационный институт им. Н. Е. Жуковского

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ

Մի էքստրեմալ խնդրի մասին և Կակեյայի թեորեմը

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։ Գոյություն ունի $2n$*-ից ոչ ավել աստիճանի միակ* $R(z)$ *բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

1. $R(z)$*-ը թույլ է տալիս հետևյալ ներկայացումը*

$$R(z)=\mathrm{const}\,r^2(z)\tau(z)\tau^*(z),\ \text{որտեղ՝}$$

$$r(z)=\prod_{k=1}^{m}(1-\bar{\alpha}_k z),\quad \{|\alpha_k|\}_1^m<1,$$

$$\tau(z)=\prod_{i=1}^{\nu}(z-\beta_i),\ \{|\beta_i|\}_1^{\nu}\leqslant 1,\ \ \tau^*(z)=z^{\nu}\bar{\tau}\left(\frac{1}{z}\right),\ m+\nu=n\text{:}$$

2. $R(z)$*-ը բավարարում է հետևյալ պայմաններից մեկին՝*

2.1) $R(\gamma_k)=\delta_k\ |\gamma_k|<1$, γ_k *և* δ_k*-ն* $(k=0, 1, \ldots, n)$ *տված են*

2.2) $R(z)=\mu_0+\mu_1 z+\ldots+\mu_n z^n+a^{n+1}z^{n+1}+\ldots+\alpha_{2n}z^{2n}$

μ_k*—գործակիցները տված են։*

Այս թեորեմը առաջին անգամ տոպոլոգիական մեթոդով ապացուցել է Կակեյան։ 2.2) պայմանի դեպքում այս թեորեմի ոչ ուղիղ ապացույց տրված է Ֆ. Ռիսի, Ս. Տակենակի, Գ. Մ. Գոլուզինի և ուրիշների կողմից։

Հոդվածում ևս բերված է այս թեորեմի ոչ ուղիղ ապացույցի մի մեթոդ, որը սակայն նույնն է 2.1) և 2.2) դեպքերի համար և, ինչպես մեզ թվում է, պարզ է վերևում նշված հեղինակների մեթոդներից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Kakeya*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 22, 489—504 (1922). [2] *F. Riesz*, Acta Math., B. 42, 145—171 (1920). [3] *S. Takenaka*, Jap. Journ. of Math, v. 11, 47—50 (1925). [4] *Г. М. Голузин*, Мат. сб., т. 16 (58), 295—305 (1945). [5] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, Гонти, М.—Л., 1950. [6] *В. И. Смирнов*, Журн. Ленинград. физ-мат. о-ва, т. 2 (2), 22—37 (1928). [7] *С. Я. Хавинсон*, Уч. зап. МГУ, вып. 148, Математика, т. IV, 133—143 (1951).