ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 4

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

А. Д. Туниев

Обобщенное частично-нормальное решение и его свойства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 10/V 1982)

В работе вводится понятие обобщенного частично-нормального решения (частично-нормального псевдорешения) линейных алгебраических систем, которое является обобщением известного понятия нормального псевдорешения. Алгебраической основой вводимого понятия, выявления их свойств и вычислений является обобщенный метод полного исключения Жордана—Гаусса ([1]).

Приведем необходимые обозначения из ([2]). Вектор $x=\{x_i\}$, где i пробегает множество N, будем обозначать $x[N]$. Если $K\subset N$, то соответствующий „кусок“ вектора будем обозначать $x[K]$. $a[M, N]=$ $=\{a_{ij}\}$ будет обозначать матрицу, индексы строк и столбцов которой пробегают соответственно множества M и N. $0[M, N]$—нулевая матрица. Две матрицы $a[M, N]$ и $b[K, L]$ можно помножить тогда и только тогда, когда $N=K$.

Пусть $M=\{1, 2, \ldots, m\}$, $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ и ранг $a[M, N]$ равен r. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$a[M, N]x[N]=a[M, 0], \tag{1}$$

где $x[N]$ неизвестный столбец.

Как известно, обобщенное решение системы (1) (по принципу наименьших квадратов) есть обычное решение нормальной системы

$$b[N, N]x[N]=b[N, 0], \tag{2}$$

где

$$b[N, N]=(a[M, N])^T a[M, N],$$
$$b[N, 0]=(a[M, N])^T a[M, 0]$$

Применим к системе (2) обобщенный метод полного исключения, каждая итерация которого состоит из малого шага, когда относительно выбранной системы векторов идет процесс частичной ортогонализации, и большого шага, когда процесс частичной ортогонализации закончен и преобразованию подлежат все остальные элементы системы.

Первая итерация. 1. Обозначим $N'=\{0, N\}$, и пусть $K_1\subset N$. Полагаем

$$b^{(1)}[1, N']=\frac{b[1, N']}{\|b[1, K_1]\|},$$

где $\|b[1, K_1]\|$ норма вектора $b[1, K_1]\neq 0[K_1]$.

2. Для $s\geqslant 2$ полагаем

$$b^{(1)}[s, N'] = \frac{\tilde{b}^{(1)}[s, N']}{\|\tilde{b}^{(1)}[s, K_1]\|},$$

где

$$\tilde{b}^{(1)}[s, N'] = b[s, N'] + \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i^{(1)} b^{(1)}[i, N']$$

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}(K_1) = -b[s, K_1] b^{(1)}[i, K_1], \quad (i=1, 2, \ldots, s-1).$$

3. Если $s=r_1$, где r_1 ранг матрицы $b[N, K_1]$*, то считая малый шаг законченным, переходим к п. 4, в противном случае переходим к п. 2, где вместо s берем $(s+1)$.

4. Обозначим $R_1=\{1, 2, \ldots, r_1\}$, $N_1=N\setminus K_1$, $\tilde{N}_1=N\setminus R_1$. Полагаем

$$b^{(1)}[s, N'] = b[s, N'] + \sum_{i\in R_1} \alpha_i^{(1)} b^{(1)}[i, N'], \quad s\in\tilde{N}_1,$$

где

$$\alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(1)}(K_1) = -b[s, K_1] b^{(1)}[i, K_1], \; i\in R_1,$$

и считаем большой шаг законченным. После первой итерации получим эквивалентную систему вида

$$\begin{cases} b^{(1)}[R_1, K_1]x[K_1] + b^{(1)}[R_1, N_1]x[N_1] = b^{(1)}[R_1, 0], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b^{(1)}[\tilde{N}_1, N_1]x[N_1] = b^{(1)}[\tilde{N}_1, 0], \end{cases}$$

в которой система строк матрицы $b^{(1)}[R_1, K_1]$ ортогональна. Отметим, что $b^{(1)}[\tilde{N}_1, K_1] = 0[\tilde{N}_1, K_1]$.

Вторая итерация. Пусть $K_2\subset N_1$ и ранг $b^{(1)}[\tilde{N}_1, N_1]$ равен r_2-r_1. Тогда, построив, как и ранее, $R_2=\{r_1+1, r_1+2, \ldots, r_2\}$, $N_2=N_1\setminus K_2$, $\tilde{N}_2=\tilde{N}_1\setminus R_2$, получим систему вида

$$\begin{cases} b^{(2)}[R_1, K_1]x[K_1] + b^{(2)}[R_1, K_2]x[K_2] + b^{(2)}[R_1, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[R_1, 0], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b^{(2)}[R_2, K_2]x[K_2] + b^{(2)}[R_2, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[R_2, 0], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b^{(2)}[\tilde{N}_2, N_2]x[N_2] = b^{(2)}[\tilde{N}_2, 0], \end{cases}$$

в которой система строк матрицы $b^{(2)}[R_2, K_2]$ также ортогональна.

Продолжив эту процедуру, через $\tau(\tau\leqslant r)$ итераций получим систему вида

$$\sum_{j=1}^{\tau} b^{(\tau)}[R_s, K_j]x[K_j] = b^{(\tau)}[R_s, 0], \quad s=1, 2, \ldots, \tau,$$

где K_s и R_s имеют тот же смысл, что и при $s=1, 2$.

Здесь считаем, что $r_\tau=r$, $N=\bigcup_{s=1}^{\tau} K_s$.

Обозначив

$$p[K_s, K_j] = (b^{(\tau)}[R_s, K_s])^T b^{(\tau)}[R_s, K_j], \quad (j=1, 2, \ldots, \tau),$$

* Так как относительно системы векторов $\{b[l, K_1]\}_{l\in N}$ идет процесс ортогонализации, то ранг $b[N, K_1]$ определяется в ходе ортогонализации, кроме того, здесь предполагаем, что первые r_1 строк матрицы $b[N, K_1]$ линейно-независимы. r_2 ранг $b^{(1)}[N, K_1\cup K_2]$.

$$x^0[K_s]=(b^{(\tau)}[R_s,\ K_s])^T b^{(\tau)}[R_s,\ 0],\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ \tau),$$

окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{\tau} p[K_s,\ K_j]x[K_j]=x^0[K_s],\quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ \tau. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $N=K$. Обозначим*

$$p[N,\ N]=\begin{bmatrix} p[K_1, K_1], & p[K_2, K_2], & \ldots, & p[K_1,\ K_\tau] \\ 0[K_2, K_1], & p[K_2, K_2], & \ldots, & p[K_2,\ K_\tau] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0[K_\tau,\ K_1], & 0[K_\tau,\ K_2], & \ldots, & p[K_\tau,\ K_\tau] \end{bmatrix} \tag{4}$$

Тогда

(а) *ядро матрицы $a[M,\ N]$ представимо в виде*

$$Y=(p[N,\ N]-e[N,\ N])z[N],$$

где $e[N,\ N]$ единичная матрица, $z[N]$—произвольный вектор;

(б) *множество обобщенных решений представимо в виде*

$$X=x^0[N]+Y;$$

(в) *$x^0[K_s]$ ортогонален ядру Y_{K_s} подматрицы $a[M,\ K_s]$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ \tau)$;*

(г) *вектор $x^0[N]$ имеет наименьшую длину среди всех векторов, принадлежащих линейному многообразию*

$$X_K=x^0[N]+Y_K;\quad Y_K=\{Y_{K_1},\ Y_{K_2},\ \ldots,\ Y_{K_\tau}\};$$

(д) *при заданном разбиении $K=\{K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\tau\}$ вектор $x^0[N,\ 0]=p[N,\ N]x^0[N]$ является единственным.*

Доказательство теоремы основывается на эквивалентности систем (2) и (4) и процессе частичной ортогонализации.

При $K_1=N$ $x^0[N]$ нормальное псевдорешение, поэтому при $K=\{K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\tau\}$ естественно $x^0[N]$ называть обобщенным частично-нормальным решением (частично-нормальным псевдорешением) системы (1).

Следствие. Пусть

$$K=\{K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_\tau\};\quad K_i\cap K_j=\varnothing,\quad i\neq j,$$

$$N=\bigcup_{s=1}^{\tau} K_s;\ K'=\{K'_{d_1},\ K'_{d_2},\ \ldots,\ K'_{d_l}\},\ \text{где}$$

$$K'_{d_s}=\{K_{d_{s-1}+1},\ K_{d_{s-1}+2},\ \ldots,\ K_{d_s}\},\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ l);$$

при $s=1,\ l,\ K_{d_0}=K_1,\ K_{d_l}=K_\tau$. Тогда если при K и K', соответственно, $x^0[N]$ и $x'[N]$ частично-нормальные псевдорешения, то при $l<\tau$ $\|x^0[N]\|\geqslant\|x'[N]\|$, при этом знак строгого неравенства имеет место, если $Y_k\subset Y_{k'}$, где

$$Y_{K'}=\{Y_{K'_{d_1}},\ Y_{K'_{d_2}},\ \ldots,\ Y_{K'_{d_\tau}}\}.$$

Здесь $Y_{K'_{d_s}}$ ядро матрицы $a[M,\ K'_{d_s}]$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$.

НПО ММП Армянской ССР

Ա. Դ. ԹՈՒՆԻԵՎ

Ընդհանրացված մասնակի-նորմալ լուծումը և նրա հատկությունները

Աշխատանքում ներմուծվում է գծային հանրահաշվական համակարգերի մասնակի-նորմալ լուծման (մասնակի-նորմալ պսևդոհակադարձման) գաղափարը, որը հանդիսանում է նորմալ պսևդոհակադարձման հայտնի գաղափարի ընդհանրացումը։

Ներմուծվող գաղափարի, նրա հատկությունների և հաշվումների բացահայտման հանրահաշվական հիմքը հանդիսանում է Ժորդան-Գաուսի լրիվ բացառման ընդհանրացված մեթոդը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Д. Туниев*, ДАН АрмССР, т. 71, № 3 (1980). [2] *И. В. Романовский*, Алгоритмы решения экстремальных задач, Наука, М., 1977.