ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 4

УДК 519.876.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Леонтьев, Г. Г. Мартиросян

Об оптимизации замен для систем с износом

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/III 1983)

Пусть в некотором механизме на местах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ работают n одинаковых деталей, которые изнашиваются в ходе работы. Время работы каждой детали на фиксированном месте до ее полного износа задается числом a_i. Механизм выходит из строя в тот момент времени, когда выходит из строя хотя бы одна из этих n деталей. Предполагается, что в любой момент времени детали можно менять местами. Требуется найти расписание „замен", максимизирующее время работы механизма. В случае $n=2$ (обычный автомобиль, у которого степень износа шины зависит лишь от того, на каком мосту она работает: на переднем или заднем) нетрудно видеть, что максимальное время работы $T=\frac{2a_1 \cdot a_2}{a_1+a_2}$, причем перестановка колес должна быть произведена один раз через время $T_0=$ $=\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2}$ после начала работы.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть n деталей распределены определенным образом по n местам и пусть, для определенности, выполняется цепочка неравенств $a_1<a_2<\ldots<a_n$, $n=2, 3, 4, \ldots, \ldots$ $a_1>0$

Определение. Набор чисел $(\beta_1^i, \ldots, \beta_n^1, t_1, \ldots, \beta_1^i, \ldots, \beta_n^i, t_i, \ldots, \beta_1^s, \ldots, \beta_n^s, t_s)$ называется расписанием, если выполнены следующие условия:

1) $\beta_j^i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ при $i=\overline{1, s}$ $j=\overline{1, n}$;

2) все компоненты набора $\beta_i=\{\beta_1^i, \ldots, \beta_n^i\}$ различны;

3) справедливы неравенства

$$z_1(\rho) \equiv 1-\sum_{i=1}^{s} \frac{t_i}{a_{\beta_1^i}} \geqslant 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$z_n(\rho) \equiv 1-\sum_{i=1}^{s} \frac{t_i}{a_{\beta_n^i}} \geqslant 0;$$

4) $t_i \geqslant 0$. $i=\overline{1, s}$ $s=1, 2, \ldots, \ldots$

Здесь β_j^i является номером места, на котором работает j-ая деталь в промежутке от $T_{i-1}=\sum\limits_{k=0}^{i-1} t_k$ до $T_i=\sum\limits_{k=0}^{i} t_k$, а неравенства (1) означают, что при работе по расписанию ρ ни одна из деталей не выйдет из строя до момента времени $T(\rho)=\sum\limits_{i=1}^{s} t_i$. Пусть множество всех расписаний обозначено через P. Задачу можно сформулировать так:

$$\begin{cases} T(\rho) \to \max \\ \rho \in P \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Расписание* $\rho_0 = 1, 2, \ldots, n, \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}, 2, \ldots, n, 1, \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}, \ldots, n, 1, \ldots, (n-1), \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$ *является оптимальным для задачи* (2).

Доказательство. Ясно, что $T(\rho_0)=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

Для произвольного расписания ρ обозначим коэффициент при $\dfrac{1}{a_i}$ в выражении для $z_l(\rho)$ через $t_i^l(\rho)$. Для всякого расписания ρ имеем $z_l(\rho) \geqslant 0$ при любом l. Отсюда $\sum\limits_{l=1}^{n} z_l(\rho) \geqslant 0$ и, принимая во внимание, что $\sum\limits_{=1}^{n} t_i^l(\rho) = T(\rho)$, получим $T(\rho) \leqslant \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

Следовательно, расписание ρ_0 является оптимальным.

Определение. Число $s-1$ называется числом перестановок расписания ρ. Ясно, что число перестановок расписания ρ_0 есть $(n-1)$. Интересно выяснить, является ли это число минимальным для оптимальных расписаний. Для ответа на этот вопрос получен следующий результат:

Лемма 1. *Пусть ρ_0—оптимальное расписание для задачи* (2). *Тогда для $l=1, 2, \ldots, n$ выполняются соотношения:* $z_l(\rho_0)=0$

Теорема 2. *Если для величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство $a_2 a_n + (n-2) a_1 a_2 - (n-1) a_1 a_n > 0$, то всякое расписание ρ с числом перестановок меньшим $n-1$ не является оптимальным.*

Доказательство. Пусть ρ—расписание с числом перестановок меньшим $(n-1)$. И пусть детали занумерованы произвольным образом. Легко видеть, что существует деталь с некоторым номером

i_0 такая, что время ее работы на месте A_1 больше, чем $\frac{1}{n-1} \cdot T(\rho)$, и деталь (с номером i_0), которая вообще не работает на месте A_1. После несложных выкладок получаем $z_{i_0}(\rho) > z_{j_0}(\rho)$, что противоречит лемме 1.

Следовательно, расписание ρ не является оптимальным.

Рассмотрим теперь следующее обобщение задачи (2).

Пусть для каждого места A_l задана функция $b_l(t)$, характеризующая скорость износа. Естественно полагать, что $b_l(t)$ определены, непрерывны, положительны и строго возрастают на $[0, \infty)$. Будем считать, для определенности, что

$$b_1(t) > b_2(t) > \ldots > b_n(t)$$

при всех $t \in [0, \infty)$. Определение расписания сохраняет свою силу с той лишь разницей, что теперь

$$z_i(\rho) = 1 - \sum_{l=1}^{s} \int_{T_{l-1}}^{T_l} b_{\beta_l^i}(t)\,dt$$

Как и прежде требуется максимизировать время работы механизма по множеству всех расписаний P^*.

Для этой задачи получены следующие результаты:

Теорема 3. *При $n=2$ существует оптимальное расписание, число перестановок которого равно единице.*

Теорема 4. *Если $b_i(t) = c_i t + d_i$ $i = \overline{1, n}$, то*

$$\max_{\rho \in P^*} T(\rho) = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 + 2n \sum_{i=1}^{n} c_i} - \sum_{i=1}^{n} d_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}.$$

Рассмотрим другое обобщение задачи (2). На n местах работают m_1 деталь I типа и m_2 деталь II типа $(m_1 + m_2 = n)$. Время работы детали I типа на месте A_i до полного износа задается величиной $r_1 a_i$, а детали II типа — $r_2 a_i$. Пусть вначале деталям I типа в произвольном порядке присвоены номера с 1 по m_1, а деталям II типа с (m_1+1)-го до n-го. Будем предполагать, что $r_1 < r_2$. Как и в задаче (2) требуется максимизировать время работы механизма.

Для этой задачи получены следующие результаты:

$$\text{если} \quad \frac{m_1 r_1}{\sum_{i=m_2+1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \frac{m_2 r_2}{\sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{a_i}}, \quad \text{то}$$

максимальное время работы механизма

$$T_{\max} = \frac{m_1 r_1}{\sum_{i=m_2+1}^{n} \frac{1}{a_i}}, \quad \text{при этом}$$

Հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ։ Եթե ֆունկցիաների $\{\varphi_k\}_0^\infty$ $(\varphi_0=1)$ սիստեմը լրիվ է $C[0; 1]$ում, ապա գոյություն ունեն $\{\varphi_{\bar{k}}\}_0^n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ սիստեմով կազմված այնպիսի $\{u_{nk}\}_{k=0}^n$ բազմանդամներ, որ $u_{nk}(x)\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^n u_{nk}(x)=1$, և

$$U_n(f; x)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)u_{nk}(x)$$

դրական գծային օպերատորները կազմում են մոտարկող հաջորդականություն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Виденский*, Изв. АН БССР, сер. физ-мат., № 1, 1979. [2] *В. С. Виденский*, ДАН АрмССР, т. 70, № 3 (1980).