

УДК 531.36

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В. Т. Аванян

Некоторые теоремы к теории устойчивости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 1/VI 1982)

В работе рассматривается задача об устойчивости процесса на заданном бесконечном интервале времени в постановке К. А. Абгаряна ⁽¹⁾.

В ⁽²⁾ доказаны общие теоремы о K_{Δ}^{ω} -устойчивости и асимптотической устойчивости, а в этой работе приведены две общие теоремы о неустойчивости, а также одна обобщенная теорема о K_{Δ}^{ω} -устойчивости неавтономной нелинейной системы по линейному приближению.

1. По известной схеме, через построение функций Ляпунова нетрудно доказать следующие две общие теоремы о неустойчивости:

Теорема 1.1. Если при любой матрице $G(t) \in K_{\Delta}^{\omega}$ для полной производной по t функции

$$V(t, x) = (G^{-1}(t)x(t), G^{-1}(t)x(t))$$

в силу уравнения возмущенного процесса при некотором $t_0 > a$ в любой окрестности $\|x\| < b$ ($b > 0$) найдется точка $(t_0, x(t_0))$, где

$$\dot{V}(t_0, x(t_0)) > 0,$$

то невозмущенный процесс неустойчив на $\Delta = [t_0, \infty)$.

Теорема 1.2. Если полная производная по t любой положительно определенной эрмитовой формы

$$V(t, x) = (H(t)x, x),$$

у которой

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}(t) = \omega^2(t)$$

($\mu_i(t)$ — собственные значения эрмитовой матрицы $H(t)$) в силу уравнения возмущенного процесса в области $\|x(t)\| \leq h < \infty$ имеет вид

$$\dot{V}(t, x) = \lambda V(t, x) + W(t, x),$$

где λ — положительная постоянная, а $W(t, x)$ или тождественно обращается в нуль, или знакоположительная функция, то невозмущенный процесс неустойчив на $\Delta = [t_0, \infty)$.

2. Условия K_{Δ}^{ω} -устойчивости невозмущенного процесса, описы-

ваемого неавтономной нелинейной системой ^(4,5), основаны на теореме о диагонализации линейной системы (теорема 2.2, гл. XV, § 2 ⁽¹⁾). Эта теорема определяет общий вид матрицы преобразования линейной системы к диагональному виду. Однако чтобы воспользоваться этим преобразованием, нужно располагать фундаментальной матрицей $X(t)$ линейной системы. В некоторых случаях определение $X(t)$, а также и матрицы преобразования линейной системы к диагональному виду не представляет труда. Но все же случаи, когда могут быть найдены точные выражения для $X(t)$ в конечном виде, исключены. В то же время имеется возможность построения матрицы преобразования линейной дифференциальной системы к системе, „близкой“ к диагональной. В связи с этим представляется целесообразным построение достаточных условий $K_{\Delta}^{\bullet}$ -устойчивости, основанных на преобразованиях такого рода.

Допустим, что $K(t) = (K_1(t), \dots, K_n(t))$ — матрица Ляпунова, столбцы которой имеют одинаковую эрмитову норму (см. ⁽⁵⁾), а именно на $[a, \infty)$

$$\|K_j(t)\| = \omega \quad (j=1, \dots, n) \text{ и } \dot{K}(t) = AK - K\Lambda + N,$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}$, а N — некоторая квадратная матрица порядка n , ограниченная по норме.

Пусть возмущенный процесс описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t, x), \quad (2.1)$$

где $A(t) — n \times n$ — матрица, непрерывная на $[a, \infty)$, $\|A(t)\| \leq a_0 < \infty$, и такая, что каждое решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

ограничено на $[a, \infty)$; $h(t, x) — n \times 1$ — матрица, элементы которой (нелинейные функции отклонений x_s) таковы, что равномерно по t на $[a, \infty)$ выполняется соотношение

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{h(t, x)}{\|x\|} = 0.$$

Замена переменных $x = K(t)y$ приводит уравнение (2.1) к виду

$$\dot{y}(t) = \Lambda(t)y - K^{-1}(t)N(t)y + K^{-1}(t)h(t, Ky).$$

Полная производная от положительно определенной эрмитовой функции

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x) \equiv \|y\|^2$$

по t в силу уравнения (2.1) в данном случае представляется в виде,

$$\dot{V}(t, x) = 2\|y\|^2 \varphi(t, y(t)) + 2\text{Re}(y^* K^{-1}h), \quad (2.2)$$

где

$$\varphi(t, y(t)) = \sum_{\sigma=1}^n \text{Re} \lambda_{\sigma} \frac{|y_{\sigma}|^2}{\|y\|^2} + \frac{y^* P y}{\|y\|^2};$$

$$P = -\frac{1}{2} (K^{-1}N + N^* K^{-1*}).$$

Из (2.2) имеем

$$V(t, x) = V(t_0, x_0) \left\{ 1 + \left[\exp \int_{t_0}^t 2\varphi(t', y(t')) dt' - 1 \right] + (t - t_0)\psi(t, y) \right\},$$

где

$$\psi(t, y) = \frac{2}{(t - t_0)\|y_0\|^2} \int_{t_0}^t \exp 2 \int_{t'}^t \varphi(\tau, y) d\tau \operatorname{Re}(y^* K^{-1} h) dt'.$$

Нетрудно показать, что равномерно по t на $[t_0, \infty)$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \psi(t, y) = 0.$$

Обозначив $\mu_0(t) = \max \operatorname{Re} \lambda_\sigma(t)$, $\nu_{\max}(t)$ — максимальное собственное значение эрмитовой матрицы P , можно доказать следующую теорему.

Теорема. Если для всех $t \in [t_0, \infty)$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t [\mu_0(\tau) + \nu_{\max}(\tau)] d\tau \leq -b < 0,$$

то невозмущенный процесс K_Δ^ω -устойчив.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Տ. ԱՎԱՆՅԱՆ

Մի փանի թեորեմներ կայունության տեսության մասին

Կ. Ա. Աբգարյանի տեսությամբ ապացուցված են երկու թեորեմներ ոչ կայունության մասին և մեկ ընդհանրացված թեորեմ՝ ոչ ավտոնոմ սիստեմի գրծային մոտարկումով կայունության մասին:

Ոչ ավտոնոմ սիստեմի ուսումնասիրության համար նրա առաջին մոտավորության հավասարումը բերվում է «համարյա» անկյունագծային տեսքի, որի միջոցով պարզվում է այդ սիստեմի կայունության հարցը:

Ոչ կայունության մասին թեորեմներն ապացուցված են կյապունովի երկրորդ եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. А. Абгарян, в кн.: Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем, М., Наука, 1973. ² К. А. Абгарян, В. Т. Аванян, Тр. Моск. авиационного ин-та, вып. 339 (1975). ³ К. А. Абгарян, ПММ, т. 39, вып. 5 (1975). ⁴ К. А. Абгарян, В. Т. Аванян, ПММ, т. 41, вып. 5 (1977). ⁵ В. Т. Аванян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 31, № 4 (1978).