ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 532.546

МЕХАНИКА

Р. М. Барсегян

Осесимметричная задача теории фильтрации в неоднородных деформируемых грунтах

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 5/V 1982)

Сильносжимаемые водонасыщенные грунты широко распространены, поэтому их использование в качестве оснований сооружений становится актуальной проблемой. Осадка сооружений над сильносжимаемыми грунтами достигает больших величин (до 2,5 м), а ее стабилизация длится до нескольких десятилетий ([1]).

Распространим идею об учете изменений соотношений между жидкой и твердой фазами грунта в процессе фильтрации ([2]) на случай осесимметричной фильтрации. С этой целью введем следующую гипотезу: деформация водонасыщенного грунта под действием внешней нагрузки происходит в основном по направлению действия силы и деформациями в других направлениях можно пренебречь относительно деформации грунта по направлению действующей нагрузки.

Вывод основных уравнений осесимметричной фильтрации базируется на следующих зависимостях:

1. закон Дарси—Герсеванова, учитывающий движение жидкости относительно движущегося скелета деформируемого грунта

$$U_z-\varepsilon V_z=-K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{1}$$

где U_z и V_z—проекции скорости воды и скелета соответственно на ось oz; ε—коэффициент пористости; $K_z(H)$—коэффициент фильтрации по направлению z; H—напор;

2. закон Дарси

$$U_r=-K_r(H)\frac{\partial H}{\partial r}, \tag{2}$$

где $K_r(H)$—коэффициент фильтрации; U_r—проекция скорости воды по направлению r;

3. уравнение неразрывности жидкой фазы, которое с учётом сжимаемости воды (по закону Гука) имеет вид

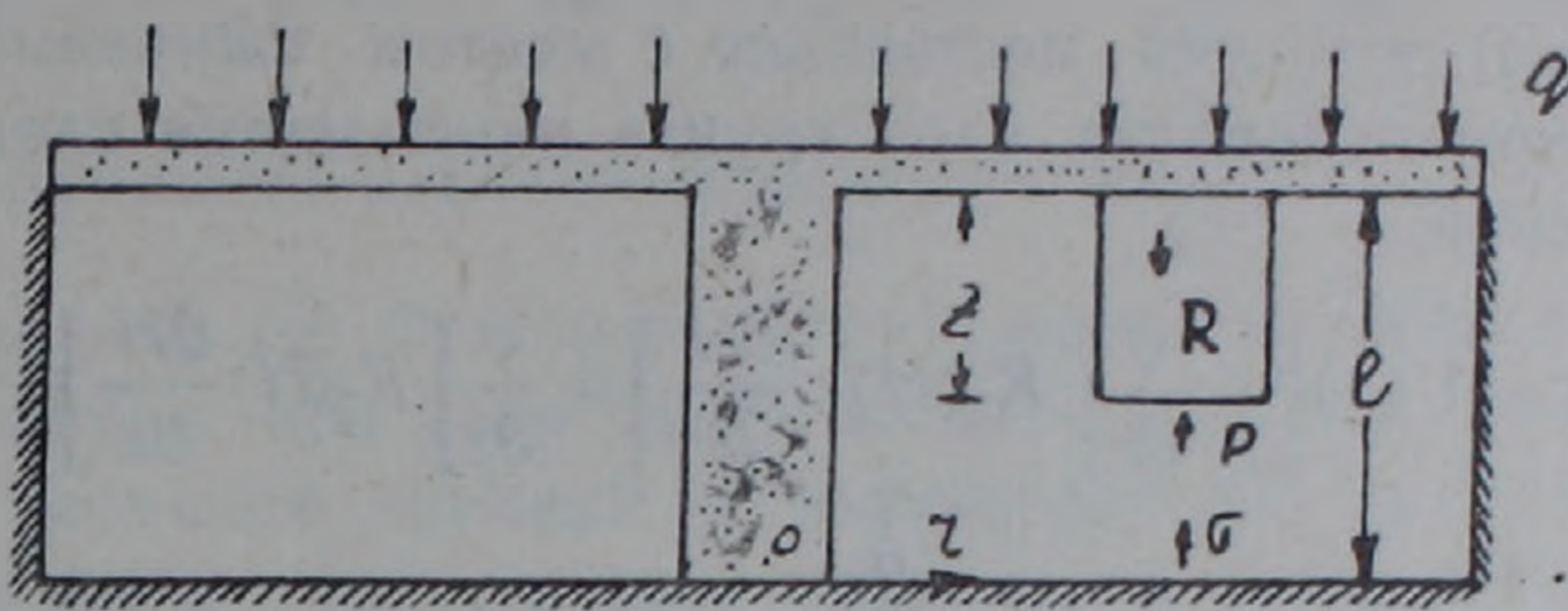
$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\gamma r U_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\gamma U_z)}{\partial z}=0, \tag{3}$$

где γ—объемный вес воды; n—пористость;

4. уравнение неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial m}{\partial t}=0 \qquad (m+n=1); \tag{4}$$

5. уравнение равновесия, учитывающее изменение соотношений между фазами грунта в любой момент времени [2,3] (рисунок)



$$q+R=q+\int\limits_{S(t)}^{z}\left(\gamma\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{\gamma_s}{1+\varepsilon}\right)dz=\sigma+P, \tag{5}$$

где q—внешняя нагрузка; γ_s—удельный вес скелета; $S(t)$—осадка слоя деформируемого грунта мощностью l в момент времени t; σ—напряжение в скелете; P—давление в воде;

$$R=\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}dz \tag{6}$$

есть масса водонасыщенного грунта в пределах призмы высотой z и с площадью сечения основания, равной единице.

В теории фильтрационной консолидации Терцаги—Флорина [4] выражение R в (5) является постоянной величиной $R=\gamma_{нас}z$ на весь период фильтрации. Поэтому изменение характеристик грунта в процессе фильтрации не учитывается, тогда как рассмотрение величины R в интегральной форме в уравнении (5) учитывает изменение соотношений между фазами грунта в виде изменений параметров грунта в процессе фильтрации.

О необходимости рассмотрения величины R в виде функции от z и t по (6) свидетельствует следующая простая оценка:

$$\frac{R_п-R_к}{R_п}>\frac{S_\infty}{l}, \tag{7}$$

где $R_п$ и $R_к$—соответственно первоначальное и конечное значения массы R, S_∞—конечная осадка слоя грунта мощностью l;

6. компрессионная зависимость

$$\varepsilon=f(\sigma), \tag{8}$$

в частности для линейно-деформируемых сред $f(\sigma)=-a\sigma+\text{const}$, где a—коэффициент уплотнения;

7. зависимость напора и давления

$$H=\frac{1}{\gamma}P+z. \tag{9}$$

С помощью зависимостей (1)—(5), (8) и (9) обычным способом находим, что осесимметричная фильтрация в деформируемом слое грунта под действием внешней нагрузки (или под действием собственного веса) в общей постановке с учетом сжимаемости воды и переменной проницаемости слоя грунта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=(1+\varepsilon)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H)r\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}}{(1+\varepsilon)^2}dz+\frac{\varepsilon\gamma}{E_B}\frac{\partial H}{\partial t}; \tag{10}$$

$$q+\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_s}{1+\varepsilon}dz=\sigma+P;$$

$\varepsilon=f(\sigma)$; $\quad H=\frac{1}{\gamma}P+z$; E_B—модуль объемного сжатия воды.

Из (10) в частности для линейно-деформируемых сред получим следующее уравнение осесимметричной фильтрации в деформируемых грунтах:

$$\left(\frac{\varepsilon}{E_B}+a\right)\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{a}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1+\varepsilon}{\gamma}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H)r\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}+$$

$$+\frac{a(\gamma-\gamma_s)}{\gamma}\int\limits_{S(t)}^{z}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]dz+\frac{aS'(t)}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon(S(t);t)+\gamma_s}{1+\varepsilon(S(t);t)}. \tag{11}$$

Коэффициент пористости ε в уравнениях фильтрации обычно осредняют. Вопрос о возможности такого осреднения исследован в ([2]). Для осредненного ε_{cp} из (11) получим основное уравнение фильтрации в деформируемых грунтах

$$\eta^*\frac{\partial H}{\partial t}=\eta_1\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[K_rH(r)\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]+$$

$$+\eta_2\left[K_z(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{S(t)}^{z}+\eta_3, \tag{12}$$

где

$$\eta^*=\frac{\gamma}{1+\varepsilon_{cp}}\left(a+\frac{\varepsilon_{cp}}{E_B}\right);\qquad \eta_1=\frac{a}{1+\varepsilon_{cp}};\qquad \eta_2=\frac{a(\gamma-\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{cp})^2};$$

$$\eta_3=\frac{aS'(t)(\gamma\varepsilon_{cp}+\gamma_s)}{(1+\varepsilon_{cp})^2}.$$

Если $q=\text{const}$ и $K_r(H)=K_z(H)=K(H)$, то из (12) имеем

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r \frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right] + \eta_2 \left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right]\Bigg|_{S(t)}^{z} + \eta_3. \quad (13)$$

При $K = \text{const}$ из (13) следует уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right] + \eta_2 a^* \frac{\partial H}{\partial z}\Bigg|_{S(t)}^{z} + \frac{\eta_3}{\eta^*}, \quad (14)$$

где a^* — коэффициент пьезопроводности $a^* = \dfrac{K}{\eta_1^*}$.

В выражение (6) функцию $\varepsilon(z, t)$ можно осреднять по z, относительная ошибка при этом будет меньше, чем $\Delta\varepsilon$. Действительно, для любого момента времени t выражение (6) по оценкам определенного интервала удовлетворяет следующим неравенствам:

$$R_{\min} \leqslant R_l \leqslant R_{\max},$$

где

$$R_{\min} = [l - S(t)]\left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1 + \varepsilon^*}\right); \quad R_l = \int_{S(t)}^{l} \left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1 + \varepsilon}\right) dz;$$

$$R_{\max} = [l - S(t)]\left(\gamma + \frac{\gamma_T}{1 + \varepsilon^{**}}\right); \quad \varepsilon^* = \max_z \varepsilon(z, t); \quad \varepsilon^{**} = \min_z \varepsilon(z, t);$$

$$\gamma_T = \gamma_s - \gamma.$$

Поэтому

$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max}} = \frac{\gamma_T(\varepsilon^* - \varepsilon^{**})}{(1 + \varepsilon^*)[\gamma(1 + \varepsilon^{**}) + \gamma_T]} < \varepsilon^* - \varepsilon^{**} = \Delta\varepsilon.$$

Для осредненного по z коэффициента пористости ε уравнение равновесия (5) заменяется следующим уравнением [2]:

$$q + R = q + z \frac{\gamma\varepsilon + \gamma_s}{1 + \varepsilon} = \sigma + P.$$

Тогда вместо основных дифференциальных уравнений (10)—(14) получим более простые уравнения. Так например, система уравнений (10) для этого случая получит вид (при $K_z = K_r = K(H)$)

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{E_B \frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\right) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1 + \varepsilon(H) - [z - S(t)] \frac{\gamma - \gamma_s}{1 + \varepsilon(H)} \frac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma \frac{d\varepsilon}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right] -$$

$$- \frac{1 + \varepsilon(H)}{\gamma \frac{d\varepsilon}{d\sigma}} \left\{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r \frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}. \quad (15)$$

Уравнение, соответствующее (11), будет

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{a E_B}\right) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1 + \varepsilon(H) + [z - S(t)] \frac{\gamma - \gamma_s}{1 + \varepsilon(H)} a}{\gamma a} \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right] +$$

$$+ \frac{1 + \varepsilon(H)}{\gamma a} \left\{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[K(H) r \frac{\partial H}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H) \frac{\partial H}{\partial z}\right]\right\}. \quad (16)$$

Аналогичные относительно (12)—(14) уравнения имеют вид соответственно:

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[K_r(H) r \frac{\partial H}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right] +$$

$$+ (1+\eta_4) \frac{\partial}{\partial z}\left[K_z(H) \frac{\partial H}{\partial z} \right] + \eta_1 \frac{\partial q}{\partial t}; \tag{17}$$

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(K r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right)(1+\eta_4); \tag{18}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] + a_0^* \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \tag{19}$$

где

$$\eta_4 = \frac{[z - S(t)](\gamma - \gamma_s) a}{(1+\varepsilon_{cp})^2}; \quad a_0^* = \frac{K \eta_4}{\eta^*} + a^*.$$

Из полученных выше уравнений, в частности (16)—(19), как частные случаи следуют уравнения фильтрационной консолидации грунтов и уравнения упругого режима осесимметричной фильтрации. Принимая в уравнении равновесия (6) $R=\text{const}$, приходим к основным уравнениям фильтрационной консолидации грунтов. При $R=R(t)$ (для осредненного ε по z), считая грунт линейно-деформируемой средой, приходим к уравнениям упругого режима осесимметричной фильтрации. Таким образом полученные новые уравнения являются более общими, нежели существующие в настоящее время уравнения осесимметричной фильтрации, и учитывают деформируемость грунта в процессе фильтрации.

Граничные условия должны учитывать переменность мощности слоя в процессе фильтрации ([2]). Начальное условие ставится в зависимости от того, принимается движущаяся в порах грунта жидкость сжимаемой или несжимаемой.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Սեղմելի անհամասեռ գրունտներում ֆիլտրացիայի տեսության առանցքային սիմետրիկ խնդիր

Աշխատանքում արտածվում են առանցքային սիմետրիա ունեցող ֆիլտրացիայի հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները ջրահագեցած գրունտներում։ Այդ հավասարումները հաշվի են առնում ֆիլտրացիայի ընթացքում կարծրը և հեղուկ ֆազերի փոփոխությունները՝ կախված հողաշերտի սեղմվելու հետ։ Նման մոտեցում նախկինում առաջին անգամ կիրառվում է մեր կողմից անհամասեռ միջավայրում հեղուկի հարթ շարժումները դիտարկելիս։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. А. Цытович* и др., Прогноз скорости осадок оснований сооружений, Изд. лит. по строительству, М., 1967. [2] *Р. М. Барсегян*, Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах, Изд. Ереванского ун-та, Ереван, 1977. [3] *Р. М. Барсегян*, ДАН СССР, т. 214, № 4 (1974). [4] *В. А. Флорин*, Основы механики грунтов, т. 2, Госстройиздат, Л., 1961.