ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 62.50.19

КИБЕРНЕТИКА

Ю. М. Гаспарян, Н. А. Назарян

К оценке надежности систем со сложной структурой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Атояном 14/VI 1982)

В теории надежности особое место занимают системы, исследование надежностных характеристик которых адекватно описывается булевыми моделями. В этом случае предполагается, что исследуемая система состоит из конечного числа элементов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний — полной работоспособности и полного отказа. Точно так же предполагается, что система может находиться в одном из двух указанных для элемента состояний. Если состояние i-го элемента обозначить через x_i, а состояние системы — f, то

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент находится в работоспособном состоянии} \\ 0, & \text{если } i\text{-й элемент отказал} \end{cases}$$

и

$$f = \begin{cases} 1, & \text{если система находится в работоспособном состоянии} \\ Q, & \text{если система отказала.} \end{cases}$$

Предполагается, что система вполне определенным образом зависит от состояния элементов, т. е. $f=f(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $f(\tilde{x})$ назовем структурной функцией надежности системы. Очевидно, что структурная функция надежности представляет собой функцию алгебры логики, которая во многих случаях является монотонной функцией.

Отметим, что в настоящее время отсутствует приемлемый для практики способ определения структурной функции надежности систем и вычисления вероятности события $f(\tilde{x})=1$, что дает вероятность безотказной работы системы, если только исследуемая система имеет сложную структуру. В данной работе рассматривается метод оценки надежности систем со сложной структурой с использованием понятия активности аргументов булевых функций ([1]). Получены некоторые оценки вероятности безотказной работы.

О п р е д е л е н и е 1. Нормой булевой функции $f(\tilde{x})$ называется число

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{\tilde{\alpha} \in E^n} P(\tilde{\alpha}) f(\tilde{\alpha}), \tag{1}$$

где $P(\tilde{\alpha})$ — вероятность появления набора $\tilde{\alpha}=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\tilde{\alpha} \in E^n$,

$\sum_{\tilde{\alpha}\in E^n} P(\tilde{\alpha})=1.$

Если аргументы функции $f(\tilde{x})$ статистически независимы, то

$$\|f(\tilde{x})\|=\sum_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)\in E^n} P_1^{\alpha_1}\ldots P_n^{\alpha_n} f(\tilde{\alpha}),$$

где

$$P_i^{\alpha_i}=\begin{cases} P_i, & \text{если } \alpha_i=1\\ 1-P_i, & \text{если } \alpha_i=0,\end{cases}$$

$P_i=\|x_i\|$—вероятность того, что x_i принимает значение 1. В дальнейшем, если не будут сделаны специальные оговорки, будем предполагать, что аргументы функции $f(\tilde{x})$ статистически независимы.

Легко доказываются следующие свойства нормы булевой функции:

1. Для булевых функций $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$

$$\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|\,\|f_2(\tilde{x})\|,$$

если $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ не имеют общих существенных аргументов;

2. $\|f_1(\tilde{x})\vee f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|+\|f_2(\tilde{x})\|-\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|$;

3. $\|f_1(\tilde{x})\oplus f_2(\tilde{x})\|=\|f_1(\tilde{x})\|+\|f_2(\tilde{x})\|-2\|f_1(\tilde{x})f_2(\tilde{x})\|$;

4. $\|\bar{f}(\tilde{x})\|=1-\|f(\tilde{x})\|$.

Обозначение 1. Функцию, полученную из $f(\tilde{x})$ подстановкой вместо переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_k} (1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n)$ соответственно констант $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k$, обозначим через $f^{i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}(\tilde{x})$ и назовем подфункцией функции $f(\tilde{x})$.

Определение 2. Производной булевой функции $f(\tilde{x})$ по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}$; $(1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n)$ называется функция

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}}=f(\tilde{x})\oplus f(x_1,\ldots,\bar{x}_{i_1},\ldots,\bar{x}_{i_k},\ldots,x_n). \qquad (2)$$

Определение 3. Активностью функции $f(\tilde{x})$ по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}$; $(1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n)$ называется норма производной этой функции по совокупности аргументов $\tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}$ [1], т. е.

$$\omega^{f(\tilde{x})}_{i_1,\ldots,i_k}=\left\|\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_{i_1,\ldots,i_k}}\right\|. \qquad (3)$$

Пусть $f(\tilde{x})$ является монотонной функцией. Тогда можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.

$$\|f(\tilde{x})\| = \|x_i\|\omega_i^{f(\tilde{x})} + \|f_0^i(\tilde{x})\|. \tag{4}$$

Доказательство. Легко получить следующее представление булевой функции по аргументу x_i; $i=\overline{1, n}$:

$$f(\tilde{x}) = x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus f_0^i(\tilde{x}). \tag{5}$$

Применив свойство 3 нормы булевой функции на (5), получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \left\| x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \right\| + \|f_0^i(\tilde{x})\| - 2 \left\| x_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \cdot f_0^i(\tilde{x}) \right\|. \tag{6}$$

Можно показать, что для монотонной функции $f(\tilde{x})$ $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0$, для любого i; $i=\overline{1, n}$.

В самом деле, известно ([1]), что

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} = f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_1^i(\tilde{x}). \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_0^i(\tilde{x}) f_1^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}) \oplus f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0, \quad i=\overline{1, n}. \tag{8}$$

Здесь использовано свойство монотонной функции

$$f_0^i(\tilde{x}) f_1^i(\tilde{x}) \equiv f_0^i(\tilde{x}), \quad i=\overline{1, n}. \tag{9}$$

Учитывая (8) и свойство 1 нормы функции $f(\tilde{x})$, из (6) получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \|x_i\|\omega_i^{f(\tilde{x})} + \|f_0^i(\tilde{x})\|, \quad i=\overline{1, n},$$

что и требовалось доказать.

Используя (4), в общем случае для некоторой последовательности аргументов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ норму монотонной функции $f(\tilde{x})$ можно представить в следующей форме:

$$\|f(\tilde{x})\| = \|x_{i_1}\|\omega_{i_1}^{f(\tilde{x})} + \|x_{i_2}\|\omega_{i_2}^{f_0^{i_1}(\tilde{x})} + \ldots + \|x_{i_k}\|\omega_{i_k}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(\tilde{x})} +$$
$$+ \|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\| = \sum_{j=1}^{k} \|x_{i_j}\|\omega_{i_j}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})} + \|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\|. \tag{10}$$

Пусть $f(\tilde{x}) \not\equiv \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$ и конъюнкция $x_{i_1} \ldots x_{i_k} (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ является простой импликантой функции $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Тогда из (10) и с учетом того, что

$$\|f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\| = 0,$$

можно написать

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_{i_j}\|\omega_{i_j}^{f_{0,\ldots,0}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})}, \tag{11}$$

При записи (10) и (11) использовано обозначение $f_0^{i_0}(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x})$. При $f(\tilde{x}) \neq 1$ для последовательности $x_1, \ldots, x_n$ из (10) получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \omega_i^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,i-1}(\tilde{x})}, \quad f_0^0(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}). \tag{12}$$

Лемма 1. *Для того чтобы функция $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_0^i(\tilde{x}) \equiv 0$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(\tilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} + \|f_0^i(\tilde{x})\| = \|f(\tilde{x})\|; \quad i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Предполагается, что $\|x_i\| > 0$.

Следствие 1. Для монотонных функций, и только для них, выполняется равенство

$$\|x_i\| \omega_i^{f(\tilde{x})} - \|x_j\| \omega_j^{f(\tilde{x})} = \|f_0^j(\tilde{x})\| - \|f_0^i(\tilde{x})\| \tag{14}$$

для любого i, j; $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Теперь, используя известное представление булевой функции по аргументу x_i, $i = \overline{1, n}$

$$f(\tilde{x}) = \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \oplus f_1^i(\tilde{x}) \tag{15}$$

и свойство 3 нормы булевой функции, можно написать

$$\|f(\tilde{x})\| = \left\| \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} \right\| + \|f_1^i(\tilde{x})\| - 2 \left\| \bar{x}_i \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_i} f_1^i(\tilde{x}) \right\|. \tag{16}$$

Аналогично доказательству (4) из (16) можно получить

$$\|f(\tilde{x})\| = \|f_1^i(\tilde{x})\| - (1 - \|x_i\|) \omega_i^{f(\tilde{x})}; \quad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

В общем случае для некоторой выбранной последовательности переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n)$ из (17) получим

$$\|f(\tilde{x})\| = \|f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_k}(\tilde{x})\| - (1 - \|x_{i_1}\|) \omega_{i_1}^{f(\tilde{x})} - \ldots -)1 - \|x_{i_k}\|) \omega_{i_k}^{f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_{k-1}}(\tilde{x})}. \tag{18}$$

Пусть $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n)$ является простой импликантой функции $f(\tilde{x})$. Тогда из (17) и с учетом того, что

$$\|f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_m}(\tilde{x})\| = 1$$

получим

$$\|f(\tilde{x})\| = 1 - \sum_{j=1}^{m} (1 - \|x_{i_j}\|) \omega_{i_j}^{f_{1,\ldots,1}^{i_1,\ldots,i_{j-1}}(\tilde{x})}. \tag{19}$$

В (17) и (18) принято обозначение

$$f_1^{i_0}(\tilde{x}) \equiv f(\tilde{x}).$$

При $f(\widetilde{x})\not\equiv 0$ для последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно написать

$$\|f(\widetilde{x})\|=1-\sum_{i=1}^{n}(1-\|x_i\|)\omega_i^{f_{1,\ldots,1}^{1,\ldots,i-1}(\widetilde{x})}; \quad f_1^0(\widetilde{x})\equiv f(\widetilde{x}). \tag{20}$$

Лемма 3. *Для того чтобы функция $f(\widetilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial f(\widetilde{x})}{\partial x_i} f_1^i(\widetilde{x})\equiv\frac{\partial f(\widetilde{x})}{\partial x_i} \text{ для любого } i,\ i=\overline{1,n}. \tag{21}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы (1).

Лемма 4. *Для того чтобы функция $f(\widetilde{x})$ была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|f_1^i(\widetilde{x})\|-(1-\|\widetilde{x}_i\|)\omega_i^{f(\widetilde{x})}=\|f(\widetilde{x})\|, \quad i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Для выяснения физической сущности активности аргумента булевой функции $f(\widetilde{x})$ поступим следующим образом. Из (4) можно написать

$$\|f_0^i(\widetilde{x})\|+\|x_i\|\omega_i^{f(\widetilde{x})}=\|x_i\|\|f_1^i(\widetilde{x})\|+(1-\|x_i\|)\|f_0^i(\widetilde{x})\|; \quad i=\overline{1,n},$$

отсюда

$$\omega_i^{f(\widetilde{x})}=\|f_1^i(\widetilde{x})\|-\|f_0^i(\widetilde{x})\|. \tag{23}$$

Учитывая (23) и (4), получим

$$\frac{\partial\|f(\widetilde{x})\|}{\partial\|x_i\|}=\|f_1^i(\widetilde{x})\|-\|f_0^i(\widetilde{x})\|=\omega_i^{f(\widetilde{x})}, \tag{24}$$

т. е. активность функции $f(\widetilde{x})$ относительно переменной x_i представляет собой чувствительность $f(\widetilde{x})$ по аргументу x_i.

Из (12) можно получить

$$\omega_1^{f(\widetilde{x})}=\frac{\partial\|f(\widetilde{x})\|}{\partial\|x_1\|};$$

$$\omega_2^{f(\widetilde{x})}=\frac{\partial\|f(\widetilde{x})\|}{\partial\|x_2\|}=\|x_1\|\frac{\partial\omega_1^{f(\widetilde{x})}}{\partial\|x_2\|}+\omega_2^{f_0^1(\widetilde{x})};$$

. . . .

$$\omega_n^{f(\widetilde{x})}=\frac{\partial\|f(\widetilde{x})\|}{\partial\|x_n\|}=\|x_1\|\frac{\partial\omega_1^{f(\widetilde{x})}}{\partial\|x_n\|}+\|x_2\|\frac{\partial\omega_2^{f_0^1(\widetilde{x})}}{\partial\|x_n\|}+$$

$$\ldots+\|x_{n-1}\|\frac{\partial\omega_{n-1}^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,n-2}(\widetilde{x})}}{\partial\|x_n\|}+\omega_n^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,n-1}(\widetilde{x})}. \tag{25}$$

Из (12) и (25) можно получить следующее равенство:

$$\|f(\widetilde{x})\|=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\omega_i^{f(\widetilde{x})}-\|x_1\|\sum_{i=2}^{n}\|x_i\|\frac{\partial\omega_1^{f(\widetilde{x})}}{\partial\|x_i\|}-$$

$$-\|x_2\| \sum_{i=3}^{n} \|x_i\| \frac{\partial \omega_2^{f_0^1}(\tilde{x})}{\partial \|x_i\|} - \ldots - \|x_{n-1}\| \|x_n\| \frac{\partial \omega_{n-1}^{f_{0,\ldots,0}^{1,\ldots,n-1}}(\tilde{x})}{\partial \|x_n\|}. \qquad (26)$$

В заключение отметим, что равенства (12) и (18) можно использовать для точного вычисления вероятности безотказной работы системы со сложной структурой, когда известны вероятности безотказной работы элементов. Активности, участвующие в этих равенствах, показывают чувствительность надежности системы со сложной структурой относительно надежности элементов. Знание величин активностей позволяет решить задачи по оптимальному резервированию систем со сложной структурой.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

ՅՈՒ. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Ն. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Բարդ համակարգերի հուսալիության գնահատման մասին

Աշխատանքում բերված են մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների նորմաների ներկայացումներ, որոնք հնարավորություն են տալիս հաշվելու բարդ կառուցվածք ունեցող համակարգերի հուսալիությունը։ Ստացված ներկայացումներում մասնակցում են մեծություններ, որոնք բնորոշում են առանձին էլեմենտների կշիռը համակարգի հուսալիության մեջ։ Ունենալով էլեմենտների կշիռները, կարելի է լուծել օպտիմալ պահեստավորման խնդիրներ բարդ համակարգերի համար։

Ստացված են բուլյան ֆունկցիաների մոնոտոն լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

Աշխատանքում ստացված արդյունքները հնարավորություն են ստեղծում լուծելու բարդ համակարգերի օպտիմալ կառուցվածքներ ստանալու խնդիրը, որը մեծ նշանակություն ունի ժամանակակից էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաների և նրանցից բաղկացած համակարգերի նախագծման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ш. Е. Бозоян*, Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 5, 1975. [2] *К. Райншке*, Модели надежности и чувствительности систем, Мир, М., 1979.