ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 3

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Теплицевые операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/VII 1982)

1. Пусть D—единичный круг на комплексной плоскости, Γ—его граница, H^p—класс Харди с обычной L^p-нормой. Предположим $f\in H^p$, тогда f допускает каноническую факторизацию

$$f(z)=cz^n\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_kz}\,\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\mu(\theta)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right\}=$$

$$=B_f(z)S_f(z)Q_f(z),\quad z\in D,$$

где $\{z_k\}_1^\infty$—множество нулей функций f в D, $d\mu$—неотрицательная сингулярная мера. Следуя А. Берлингу (см. [1]), будем называть $J_f=B_fS_f$ внутренней частью, а Q_f—внешней частью функций f. Внутренняя функция $\tilde{J}=\tilde{B}\tilde{S}$ называется делителем функции $f\in H^p$, если $B_fS_f\tilde{J}^{-1}$ является внутренней.

Пусть X—некоторое пространство аналитических функций, $X\subset\subset H^1$. В различных вопросах анализа важную роль играют утверждения, устанавливающие, что если $f\in X$ и $\tilde{J}$ делитель функции f, то $f\tilde{J}^{-1}$ принадлежит классу X (см., например, [2]). Подробный обзор о состоянии вопроса см. в [2–4]. В работах [3,4] для некоторых пространств аналитических функций установлено, что для произвольного $h\in H^\infty$ функция

$$g(z)=P(\bar{h}f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\bar{h}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\qquad z\in D$$

не хуже в смысле гладкости, чем функция f. Отметим, что изучение указанных теплицевых операторов в пространствах, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы, имеет и другие интересные приложения (см. [3]). Цель настоящей заметки показать, что операторы $T_h(f)=P(\bar{h},f)$ ограничены в следующих пространствах аналитических функций.

а) *Пространства функций с производными из классов М. М. Джрбашяна.* Следуя М. М. Джрбашяну (см. [5,6]), обозначим через $H^p(\alpha)$, $-1<\alpha<+\infty$, $0<p<+\infty$, класс голоморфных в круге функций f, для которых

$$\|f\|_{H^p(\alpha)}=\left(\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_D(1-|\zeta|^2)^\alpha|f(\zeta)|^p d\sigma_2(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Систематическое изучение этих пространств начато в указанных выше работах ([5]) и ([6]). Далее, символом $H^p_n(\alpha)$, где n — натуральное число, обозначим класс функций f, n-ая производная которых принадлежит классу $H^p(\alpha)$. Легко видеть, что при $1\leqslant p<+\infty$ пространство $H^p_n(\alpha)$ относительно нормы

$$\|f\|_{H^p_n(\alpha)}=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|f^{(k)}\|_{H^p(\alpha)}$$

является банаховым. При $n>\dfrac{\alpha+1}{p}$ имеет место вложение $H^p_n(\alpha)\subset\subset H^1$, при этом оператор вложения непрерывен.

б) *Голоморфные функции с граничными значениями из классов Бесова.* Пусть $1\leqslant p$, $q<+\infty$, $0<\alpha<1$, обозначим через $\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}$ класс голоморфных функций $f\in H^1$, для которых

$$|f|_{\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}}=\max_{0\leqslant h\leqslant n}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|t|^{1+\alpha q}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^{(k)}(e^{i(\theta+t)})-f^{(k)}(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}<+\infty$$

в) *Функции с производными из классов BMOA.* И, наконец, символом $BMOA_n$ будем обозначать класс голоморфных функций f, для которых имеет место представление

$$f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\psi(e^{i\theta})d\theta,\quad z\in D,\quad \psi\in L^\infty,\qquad n\geqslant 0;$$

в классе $BMOA_n$ вводим соответствующую BMO норму, относительно которой $BMOA_n$ будет банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть X совпадает с одним из вышеуказанных пространств, $h\in H^\infty$, тогда оператор*

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in D$$

действует ограниченно в пространстве X. При этом

$$\|T_h(f)\|_X\leqslant\mathrm{const}\,\|h\|_\infty\cdot\|f\|_X,\quad f\in X.$$

Доказательство этой теоремы при $X=H^p_n(\alpha)$ основано на следующем вспомогательном утверждении. Пусть f — голоморфная функция в D $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$ и $\alpha>-1$.

Определим оператор

$$D^\alpha f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}a_kz^k.$$

Лемма 1. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $H^p(\alpha)$, $1<p<+\infty$ и*

$$\delta_z(\zeta)=\frac{1}{1-\zeta z}, \quad \zeta, z\in D.$$

Тогда функция $g(z)=\Phi(\delta_z)$ *является голоморфной функцией в* D, $D^{\alpha+1}g\in H^q(\alpha)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *и для любого* $f\in H^p(\alpha)$

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\rho e^{i\theta})g(e^{-i\theta})d\theta. \tag{2}$$

Кроме того, существуют положительные числа C_1, C_2 *такие, что*

$$C_1\|D^{\alpha+1}g\|_{H^q(\alpha)}\leqslant\|\Phi\|\leqslant C_2\|D^{\alpha+1}g\|_{H^q(\alpha)}. \tag{3}$$

И обратно, каждая голоморфная функция g: $D^{\alpha+1}g\in H^q(\alpha)$ *порождает линейный непрерывный функционал на* $H^p(\alpha)$ *по* (2), *для которого справедливы оценки* (3).

При $X=\Lambda^{p,q}_{n,\alpha}$ используются соображения, приведенные в ([4]).

Ниже мы докажем, что принадлежность $h\in H^\infty$ в известном смысле является необходимой.

2. Пусть ω—функция типа модуля непрерывности. Символом $H^1(\omega, \alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, обозначим класс голоморфных в D функций f, для которых

$$\|f\|_{H^1(\omega,\alpha)}=\int_D|f(z)|\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}d\sigma_2(z)<+\infty.$$

Пусть, как и выше, $H_n(\omega, \alpha)$—класс функций f: $f^{(n)}\in H(\omega, \alpha)$, при этом

$$\|f\|_{H^1_n(\omega,\alpha)}=\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left(\int_D|f^{(k)}(z)|(1-|z|)^{\alpha-1}\omega(1-|z|)d\sigma_2(z)\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $n>\alpha+1$, $h\in L^1(\Gamma)$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) T_h *является ограниченным оператором в* $H^1_n(\omega, \alpha)$;

2) h *можно представить в виде*

$$h(e^{i\theta})=\overline{h_1(e^{i\theta})}+h_2(e^{i\theta}), \quad \theta\in[-\pi, \pi],$$

где $h_1\in H_n(\omega, \alpha)$, $h_2\in H^\infty$.

При $n=\alpha+1$ имеет место

Теорема 3. *Пусть* $h\in H^\infty$, *тогда* 1) *следующие два утверждения равносильны:*

а) T_h *является ограниченным оператором в* $H^1_n(\omega, n-1)$;

б) $$B_\omega(h)=\sup_{z\in D}\left\{|h'(z)|\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\int_{1-|z|}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right\}<+\infty.$$

2) *Если* $h\in H^\infty$ *и* $B_\omega(h)=+\infty$, *то существует множество* M *второй категории в* $H(\omega, n-1)$ *такое, что для любой функции* $f\in M$ *и*

$$J_n(f)(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}f(t)dt.$$

Функция $T_h(J_n(f))$ не принадлежит классу $H_n^1(\omega, n-1)$.

Отметим, что при $\omega(t)=t$ теорема 3 ранее была установлена автором в ([7]).

Из теорем 1—3 следует

Теорема 4. *Пусть X совпадает с одним из вышеуказанных пространств, при этом, когда $X\Rightarrow H_n^1(\omega, \alpha)$, будем предполагать, что $n>\alpha+1$.*

Предположим, что $f\in X$ и J внутренняя функция, которая делит f, тогда fJ^{-1} принадлежит классу X.

3. *Голоморфные функции с модулем граничных значений из класса* $W_n^p(\Gamma)$. Приведенные результаты о делении на внутреннюю функцию показывают, что если функция f голоморфна в единичном круге и „гладка" в замкнутом круге в том или ином смысле, то функция

$$Q_f(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta\right\}$$

тоже обладает той же „гладкостью", что и функция f, по крайней мере, если слово „гладкость" означает принадлежность функций указанным классам.

Поскольку функция Q_f непосредственно определяется при помощи $|f(e^{i\theta})|$, то здесь естественно возникает следующая задача. Пусть $h(x)\geqslant 0$, $x\in[-\pi, \pi]$, $\lg h\in L^1$ и h является „гладкой" в определенном смысле, что можно сказать о гладкости внешней функции $Q_h: |Q_h(e^{i\theta})|=h(\theta)$, $\theta\in[-\pi, \pi]$ в замкнутом круге? Оказывается, что в такой постановке внешняя функция Q_h, вообще говоря, вдвое „хуже" функции h в отношении гладкости, если слово „гладкость", например, означает, принадлежность к какому-нибудь липшицевому классу α.

В работе ([8]) установлено, что если $h\in\mathrm{lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, то внешняя функция $Q_h\in\mathrm{lip}(\overline{D}, \alpha/2)$ и указанный порядок нельзя улучшить. В дальнейшем В. П. Хавин ([9]) распространил указанный результат на произвольные модули непрерывности $\omega(t)$ со свойством $\int_0 \frac{\omega(t)}{t}dt<+\infty$ (см. также ([10,11]). Здесь мы приводим утверждение, из которого видно, что аналогичное явление имеет место и для других шкал гладких функций.

Теорема 5. *Пусть $h(x)\geqslant 0$, $\log h(x)\in L^1(-\pi, \pi)$, $h\in W_{2n}^p(\Gamma)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$.*

Положим

$$Q(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log h(\theta)\,d\theta\right),\quad z\in D,$$

тогда $Q^{(n)}\in H^p$, *при этом существует функция* $h\in W^p_2(\Gamma)$ *такая, что* $Q'\notin H^{p_1}$ *для любого* $p_1: p_1>p$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Տյոպլիցյան օպերատորներ և բաժանելիություն ներքին ֆունկցիայի վրա անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում

Միավոր շրջանում անալիտիկ և սահմանափակ h-ֆունկցիայի համար, հոդվածում դիտարկվում է

$$T_h(f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad |z|<1$$

օպերատորի սահմանափակությունը, շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում ողորկ ֆունկցիաների մի քանի տարածություններում։ Ապացուցվում է նաև, որ նշված տարածություններում միշտ հնարավոր է ֆունկցիան բաժանել իր ներքին մասի վրա։ Հոդվածի վերջին մասում ուսումնասիրվում է արտաքին ֆունկցիայի ողորկության կապը կախված նրա մոդուլի ողորկությունից շրջանագծի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963. [2] *В. Пеллер, С. Хрущев*, УМН, т. 37, вып. 1 (223) (1982). [3] *В. П. Хавин*, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22 (1971). [4] *Ф. А. Шамоян*, там же. [5] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 3, № 1 (1945). [6] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики АН АрмССР, вып. 2, 1948. [7] *Ф. А. Шамоян*, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 39 (1974). [8] *В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян*, там же, т. 19 (1970). [9] *В. П. Хавин*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 6, № 2—3 (1971). [10] *Н. А. Широков*, Тр. мат. ин-та им. Стеклова, т. 150 (1978). [11] *I. E. Brennan*, Ark Math., vol. 15, № 1 (1977.)