ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXVI 1983 3

УДК 517.544

МАТЕМАТИКА

А. А. Шагинян

Об аппроксимации непрерывных векторных полей потенциальными

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 12/V 1982)

Во многих пространственных задачах приходится сталкиваться с необходимостью приближения непрерывных векторных полей градиентами гармонических функций. Аналогичная задача возникает также в теории оптимизации ([1]). Легко усмотреть связь задачи о градиентной аппроксимации на плоскости с задачей о приближении непрерывных комплексных функций на плоскости аналитическими. Общая задача об аппроксимации градиентами гармонических функций включает в себя вопросы приближения градиентов гладких функций градиентами гармонических и приближение непрерывных векторных полей градиентами гладких функций. В работе ([2]) был получен следующий результат о возможности равномерной аппроксимации непрерывных векторных полей градиентами гармонических функций. Для удобства сформулируем эту теорему в несколько более удобном виде.

Теорема 1. *Пусть $E\subset R^3$ компакт. Для того чтобы для любого непрерывного векторного поля $f: E\to R^3$ и $\varepsilon>0$ существовала гладкая в R^3 функция $g(P)$ (имеющая непрерывные частные производные) такая, что $\|f(P)-\mathrm{grad}\, g(P)\|\leqslant\varepsilon$ при $P\in E$, где $\|\cdot\|$ евклидова норма в R^3, необходимо, чтобы E не содержал кусочно-гладкой замкнутой кривой (гомеоморфа окружности). Если E является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых и не содержит ни одной замкнутой кривой, то для всякого $\varepsilon>0$ существует гармоническая в R^3 функция $H(P)$ такая, что $\|f(P)-\mathrm{grad}\, H(P)\|\leqslant\varepsilon$ при $P\in E$.*

Замечание. С точки зрения градиентных аппроксимаций условие связности дополнения множества в теореме С. Н. Мергеляна о полиномиальных приближениях на плоскости является общим выражением того факта, что для возможности градиентного приближения множество не должно содержать замкнутых кривых.

В работе ([3]) Рао показал, что на компактных множествах меры нуль из R^3 градиент любой гладкой функции можно равномерно приблизить градиентом гармонической функции. В настоящей заметке мы приводим описание множеств положительной меры, на которых такая аппроксимация возможна.

Пусть E произвольный компакт из R^3. Обозначим через $\mathfrak{M}_2(E)$ распределения $\{\mu\}$ (положительные меры) на E такие, что

$$U_2^{\mu}(P)=\int\limits_E \frac{d\mu(Q)}{r^2(P;Q)}\leqslant 1 \qquad \text{при } P\in R^3/E,$$

где $r(\cdot,\cdot)$ евклидово расстояние. Тогда емкость Рисса относительно ядра $\frac{1}{r^2}$ определяется как $C_2(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}(E)}\mu(E)$. Определим также $\mathfrak{M}_g(E)$ как распределения $\{\mu\}$ на E такие, что $\left\|\operatorname{grad}\int\limits_E\frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\right\|\leqslant 1$ при $\mu\in\mathfrak{M}_g$ и $P\in R^3\setminus E$. Емкость $C_{1,g}$ определяем как $C_{1,g}(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}_g(E)}\mu(E)$.

Пусть далее $\mathfrak{M}_{g,1}(E)$ распределения $\{\mu\}$ на E такие, что $\int\frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\leqslant 1$ и $\left\|\operatorname{grad}\int\limits_E\frac{d\mu(Q)}{r(P;Q)}\right\|\leqslant 1$ вне E. Емкость $C_{1,g}$ определяем, полагая $C_{1,g}(E)=\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{m}_{g,1}(E)}\mu(E)$.

Теорема 2. *Если для всякого $P\in R^3$ и шара $K(P;\delta)$ радиуса δ с центром в точке P $C_{1,g}(K(P;\delta)\setminus E)=C_{1,g}(K(P;\delta))$, то для всякой гладкой в окрестности E функции $f(P)$ (имеющей непрерывные первые прозводные) и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что*

$$|f(P)-g(P)|+\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon \text{ при } P\in E.$$

Следствие. Если для всякого $P\in R^3$ и $1>\delta>0$ $C_2(K(P;\delta)\setminus E)=\delta^2$, то для всякой гладкой в окрестности E функции $f(P)$ и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что

$$|f(P)-g(P)|+\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon \quad \text{при } P\in E.$$

Теорема 3. *Если для всякого $P\in R^3$ и $1>\delta>0$ $C_g(K(P;\delta)\setminus E)=\delta^2$, то для всякой гладкой на E функции $f(P)$ и $\varepsilon>0$ существует гармоническая на E функция $g(P)$ такая, что* $\|\operatorname{grad}f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon$ при $P\in E$.

Основные результаты данной заметки получены по аналогии с известными результатами С. Н. Мергеляна, А. Г. Витушкина и А. А. Гончара.

Ереванский государственный университет

Ա. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Անընդհատ վեկտորական դաշտերի մոտարկումը պոտենցիալ դաշտերով

Դիցուք $E\subset R^3$ կոմպակտ է։

Թեորեմ 1. Որպեսզի կամայական անընդհատ $f: E\to R^3$ և $\varepsilon>0$ համար գոյություն ունենա ողորկ $g(P)$ ֆունկցիա R^3ում այնպես, որ $\|f(P)-\operatorname{grad}g(P)\|\leqslant\varepsilon$, երբ $P\in E$ անհրաժեշտ է, որ E-ն չընդգրկի կտոր առ կտոր ողորկ փակ կոր: Եթե E-ն վերջավոր հատ կտոր առ կտոր ողորկ կորերի միացում է և չի ընդգրկում ոչ մի հատ փակ կոր, ապա մոտարկումը նախորդ իմաստով հնարավոր է, ուր $g(P)$-ն կարելի է վերցնել հարմոնիկ R^3-ում: Բացի դրանից ներմուծվում է C_g ունակությունը, որի միջոցով ձևակերպվում է հետևյալ արդյունքը՝

Թեորեմ 3. Եթե կամայական $P \in R^3$ և $1 > \delta > 0$-ի համար $C_g(K(P; \delta) \setminus E) = \delta^2$, ուր $K(P; \delta)$-ն P կենտրոնով և δ շառավղով գունդ է, ապա կամայական E-ի վրա ողորկ $f(P)$ ֆունկցիայի և $\varepsilon > 0$ համար գոյություն ունի E-ի վրա հարմոնիկ $g(P)$ այնպիսի ֆունկցիա, որ $\|\mathrm{grad} f(P) - \mathrm{grad} g(P)\| \leqslant \varepsilon$, երբ $P \in E$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Goor,* Jour. of approxim. theory, v. 12, p. 385—395 (1974). [2] *А. А. Шагинян,* Изв. АН АрмССР. Математика, т. 6, № 2—3 (1971). [3] *N. V. Rao,* Jour. of approxim. theory, v. 12, p. 52—60 (1974).