ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 2

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Г. Гулян, Э. А. Запунян

О двух контактных задачах для круглого диска с упругими креплениями *

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 24/V 1982)

Обзор основных результатов и работ по теории задач контактного взаимодействия между тонкостенными креплениями и массивными деформируемыми телами приведен в [1]. При этом тела обычно моделируются в виде бесконечных областей. Между тем исследование такого круга задач для тел конечных размеров, который сравнительно мало изучен, представляет теоретический и практический интерес. В этом направлении укажем на работы [2,3], в которых рассматриваются задачи для прямоугольника. Укажем также на работы [4,5], которые по методу исследования весьма близки к настоящей работе.

Здесь приводится исследование двух контактных задач о передаче нагрузки от одной или двух накладок к упругому круглому диску.

Основываясь на известных физических предположениях, принятых в работах [4,6], решение поставленных задач сводят к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях. Затем на основе аппарата ортогональных многочленов Чебышева это уравнение сводится к квазиполной регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

1. Пусть упругий круглый диск толщиной $2h$ и радиуса R усилен тонкими упругими накладками, причем в первой задаче предполагается, что диск с двух сторон усилен одной (рис. 1), а во второй задаче — двумя одинаковыми и симметрично расположенными относительно центра диска упругими накладками (рис. 2). Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления упругих накладок с диском, когда на накладках действует сама уравновешенная система сосредоточенных сил.

Выведем разрешающие уравнения поставленных задач.

Сначала рассмотрим первую задачу (рис. 1). Пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [7], легко определить функцию влияния для диска, когда в его точках $(-x_0, 0)$ и $(x_0, 0)$ действуют равные по величине и противоположно направленные сосредоточенные силы P вдоль оси $0x$. Эта функция имеет вид

* Работа доложена на II Всесоюзной научной конференции „Смешанные задачи механики деформируемого тела“, Днепропетровск, 1981 г.

$$u^{(2)}(x,0)=\frac{P}{4\pi E}\left\{(1+\nu)(3-\nu)\ln\left|\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}\right|+[(1-\nu)^2+4]\ln\frac{1+\xi\eta}{1-\xi\eta}+\right.$$

$$+2(1-\nu)^2\xi\eta+\frac{2\xi\eta}{(1-\xi^2\eta^2)^2}[\nu^2+6\nu-3-2\nu(1+\nu)(\xi^2+\eta^2)+$$

$$\left.+(3\nu^2-6\nu+7)\xi^2\eta^2-(1-\nu^2)\xi^2\eta^2(\xi^2+\eta^2)-2(1-\nu)^2\xi^4\eta^4]\right\}, \qquad (1.1)$$

где $\xi=x/R$, $\eta=x_0/R$.

Здесь $u^{(2)}(x,0)$ — горизонтальное перемещение точек диска вдоль оси $0x$, а E и ν — его модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

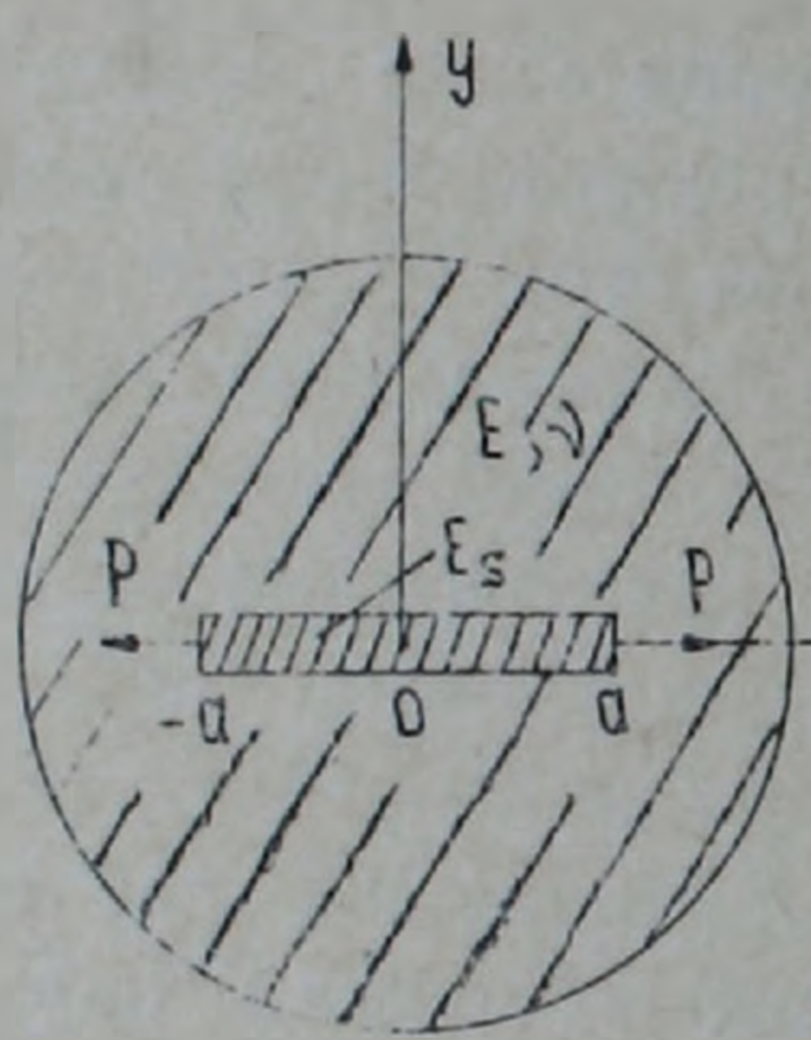

Рис. 1. Упругий круглый диск, усиленный одной накладкой

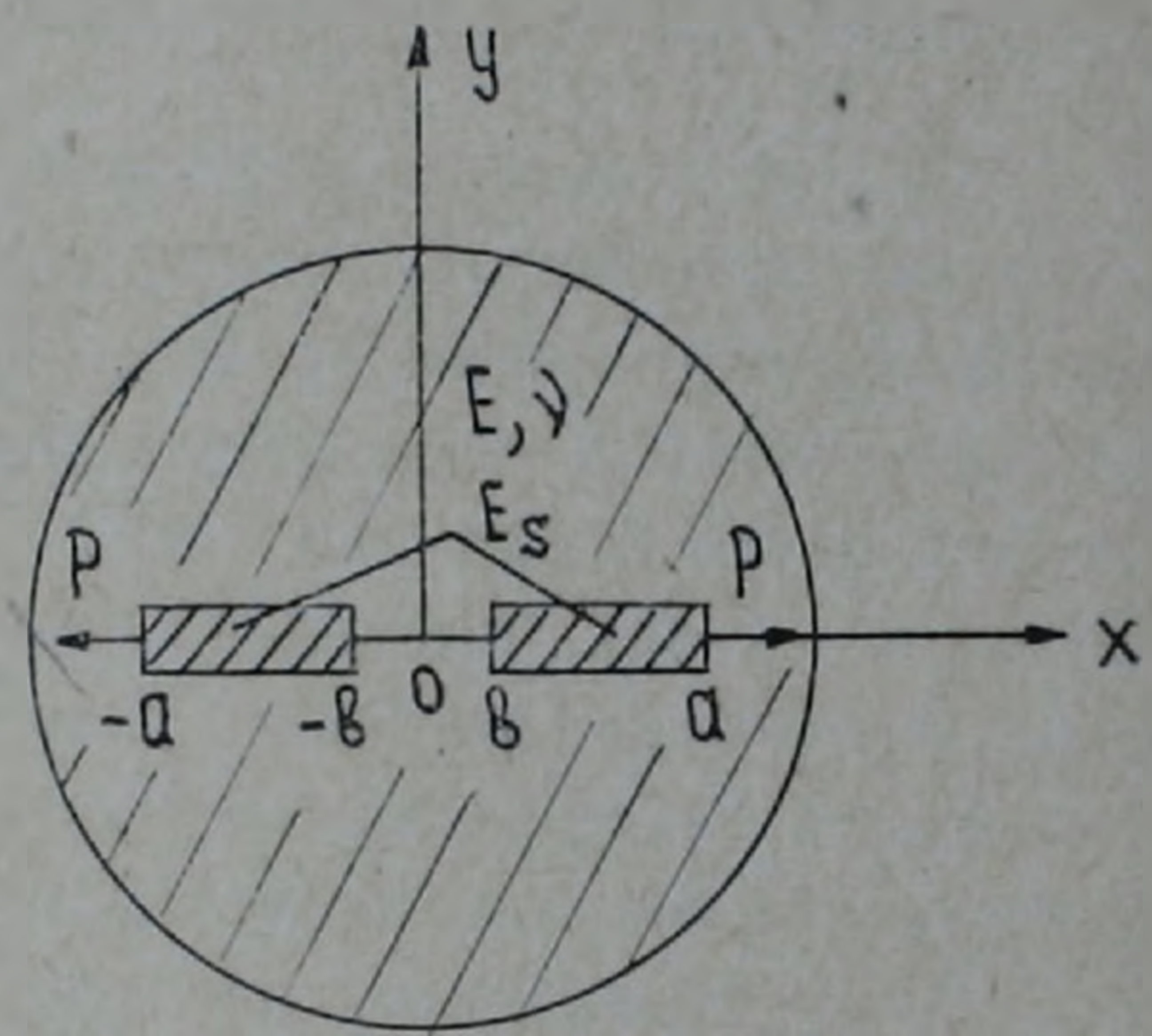

Рис. 2. Упругий круглый диск, усиленный двумя накладками

Вследствие симметрии задачи будем считать $0<x<a$. Теперь из условия равновесия любой части (x, a) накладки, учитывая закон Гука, имеем

$$\varepsilon_x^{(1)}=\frac{1}{E_sA_s}\left[P-d\int_x^a\tau_s(x_0)\,dx_0\right], \quad (0<x<a), \qquad (1.2)$$

где E_s — модуль упругости накладки, A_s — площадь прямоугольного поперечного сечения накладки, d — ее ширина, а $\tau_s(x)$ — подлежащее определению тангенциальное контактное напряжение. При этом из условия равновесия всей накладки будем иметь

$$\int_{-a}^{a}\tau_s(x)dx=0.$$

С другой стороны, перемещения точек отрезка $[0, a]$ диска от действующих на него контактных напряжений $\tau_s(x)$ согласно (1.1) будут

$$u^{(2)}(x,0)=\frac{d}{h}\,\frac{R(1+\nu)(3-\nu)}{4\pi E}\int_0^{a/R}\left[\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}+K(\xi,\eta)\right]\tau(\eta)d\eta, \qquad (1.3)$$

$$(0<\xi<a/R)$$

где

$$K(\xi,\eta)=\frac{(1-\nu)^2+4}{(1+\nu)(3-\nu)}\ln\frac{1+\xi\eta}{1-\xi\eta}+\frac{2(1-\nu)^2}{(1+\nu)(3-\nu)}\xi\eta+\frac{1}{(1+\nu)(3-\nu)}\times$$

$$\times\frac{2\xi\eta}{(1-\xi^2\eta^2)^2}\left[\nu^2+6\nu-3-2\nu(1+\nu)(\xi^2+\eta^2)+(3\nu^2-6\nu+7)\xi^2\eta^2-\right.$$

$$\left.-(1-\nu^2)\xi^2\eta^2-2(1-\nu)^2\xi^4\eta^4\right],\quad (\tau_s(\xi R)=\tau(\xi)).$$

На участке $[0, a]$ контакта накладки с диском должно выполняться условие

$$u^{(2)}(x,0)=u^{(1)}(x),\quad (0<x<a),$$

которое с учетом (1.2)—(1.3) приводит к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{a_0}\left[\ln\frac{\xi+\eta}{|\xi-\eta|}+K(\xi,\eta)\right]\varphi'(\eta)d\eta=\lambda\left[\xi-\int\limits_{\xi}^{a_0}\eta\varphi'(\eta)d\eta\right] \tag{1.4}$$

$$(0<\xi<a_0)$$

при граничном условии

$$\varphi(a_0)=0, \tag{1.5}$$

где введены безразмерные величины

$$\tau(\xi)=\frac{P}{dR}\tau_0(\xi),\quad a_0=\frac{a_0}{R},\qquad \lambda=\frac{4EhR}{(1+\nu)(3-\nu)E_sA_s}$$

$$\varphi(\xi)=-\int\limits_{\xi}^{a_0}\tau_0(\eta)d\eta,\quad \varphi'(\xi)=\tau_0(\xi). \tag{1.6}$$

Аналогичным образом получим, что разрешающее уравнение для второй задачи имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{b_0}^{a_0}\left[\ln\frac{1}{|\xi-\eta|}+\ln\frac{a_0-b_0}{2}+K_1(\xi,\eta)\right]\varphi'(\eta)d\eta=-\lambda\int\limits_{b_0}^{\xi}(\xi-\eta)\varphi'(\eta)d\eta+c$$

$$(b_0<\xi<a_0) \tag{1.7}$$

$$\varphi(b_0)=0,\quad \varphi(a_0)=-1, \tag{1.8}$$

где

$$K_1(\xi,\eta)=K(\xi,\eta)+\ln\frac{2(\xi+\eta)}{a_0-b_0},$$

$$\varphi(\xi)=\int\limits_{b_0}^{\xi}\tau_0(\eta)d\eta,\quad \varphi'(\xi)=\tau_0(\xi), \tag{1.9}$$

$$c=\frac{4Eh}{(1+\nu)(3-\nu)P}u^{(1)}(b),\quad b_0=b/R.$$

Постоянная c, которая характеризует жесткость системы, также подлежит определению.

После перехода к новым переменным

$$\xi=\frac{1}{2}[(a_0-b_0)t+a_0+b_0],\quad \eta=\frac{1}{2}[(a_0-b_0)v+a_0+b_0],\tag{1.10}$$

$$\varphi\left\{\frac{1}{2}[(a_0-b_0)t+a_0+b_0]\right\}=\Phi(t)$$

уравнение (1.7) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left\{\ln\frac{1}{|t-v|}+\widetilde{K}_1(t,v)\right\}\Phi'(v)dv=-\lambda_1\int\limits_{-1}^{t}(t-v)\Phi'(v)dv+c\tag{1.11}$$

$$(-1<t<1)$$

$$\Phi(-1)=0,\quad \Phi(1)=-1,\tag{1.12}$$

где

$$\widetilde{K}_1(t,v)=K_1[\xi(t),\ \eta(v)],\ \lambda_1=\frac{a_0-b_0}{2}\lambda.\tag{1.13}$$

2. Решение уравнения (1.4) представим в виде ряда

$$\varphi'(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a_0^2-\xi^2}}\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_{2n-1}(\xi/a_0),\ (0<\xi<a_0).\tag{2.1}$$

Здесь $T_{2n-1}(\xi/a_0)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$—многочлены Чебышева первого рода, а $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$—неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражение (2.1) в (1.4) и учитывая соотношения для полиномов Чебышева, по процедуре ([8–10]) после некоторых элементарных выкладок относительно коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим эквивалентную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Не останавливаясь на подробностях, сразу приведем окончательный вид этой системы:

$$Y_m=\sum_{n=1}^{\infty}R_{m,n}Y_n+H_m,\quad (m=1,\ 2,\ \ldots),\tag{2.2}$$

где

$$X_n=(2n-1)Y_n,\quad R_{m,n}=R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)},$$

$$R_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2m-1)t\,dt\int\limits_0^{\pi/2}\widetilde{K}_z''(t,z)\cos(2n-1)z\,dz,$$

$$R_{m,n}^{(2)}=\frac{\lambda a_0}{\pi}\begin{cases}\pi\dfrac{(-1)^m}{2m-1}+\dfrac{4[2-(2m-1)^2]}{(2m-1)^2[4-(2m-1)^2]}, & n=1\\[2mm] \dfrac{4(2n-1)[1+(2n-1)^2-(2m-1)^2]}{[(2m-1)^2-4(n-1)^2][4n^2-(2m-1)^2]}, & \begin{matrix}m=1,2,\ldots\\ n=2,\ 3,\ \ldots\end{matrix}\end{cases}\tag{2.3}$$

$$H_m=\begin{cases}\lambda a_0, & m=1\\ 0, & m=2,3,\ldots\end{cases},\quad \widetilde{K}(t,z)=K(a_0\cos t,\ a_0\cos z).$$

Решение уравнения (1.11) при граничных условиях (1.12) представляется формулой

$$\Phi'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t), \quad (-1<t<1). \tag{2.4}$$

Тогда уравнение (1.11) сведется к бесконечной системе аналогичной структуры. После того как определим коэффициенты $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, значение постоянной c можно найти по формуле

$$c=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} M_n X_n - N, \tag{2.5}$$

где M_n и N определенные величины.

Для исследования бесконечной системы (2.2) заметим, что функция $\widetilde{K}(t, z)$, входящая в ядро этой системы, в квадрате $(0\leqslant t, z\leqslant \pi/2)$ непрерывна и любое число раз непрерывно дифференцируема. Тогда интегрированием по частям находим

$$R_{m,n}^{(1)}=\frac{1}{2n-1}T_{m,n}^{(1)},$$

$$T_{m,n}^{(1)}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\cos(2m-1)t\,dt\int_0^{\pi/2}\widetilde{K}_z'(t, z)\cos(2n-1)z\,dz, \tag{2.6}$$

при помощи которого можем записать

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}|R_{m,n}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|R_{m,n}^{(1)}|+\sum_{n=1}^{\infty}|R_{m,n}^{(2)}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}|T_{m,n}^{(1)}|+\sum_{n=1}^{\infty}|R_{m,n}^{(2)}|. \tag{2.7}$$

Далее, следуя известной методике, показывается, что по крайней мере

$$S_m=O(m^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad m\to\infty. \tag{2.8}$$

Последнее равенство позволяет утверждать, что бесконечная система уравнений (2.2) квазивполне регулярна при любом λ. Такой же результат имеет место для второй задачи.

Авторы благодарят С. М. Мхитаряна за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Կ. Գ. ՂՈՒԼՅԱՆ, Է. Ա. ՋԱՊՈՒՆՅԱՆ

Առանձգական ամրացումներով կլոր սկավառակի համար երկու կոնտակտային խնդիրների մասին

Դիտարկվում են մեկ կամ երկու վերադիրներից կլոր առանձգական սկավառակին բեռի փոխանցման երկու կոնտակտային խնդիրներ։ Ենթադրվում է, որ առաջին խնդրում սկավառակը երկու կողմից ուժեղացված է իր կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված մեկական, իսկ երկրորդ խնդրում՝ երկու-

ական առաձգական վերադիրներով։ Երկու խնդիրներն էլ մաթեմատիկորեն ձևակերպվում են որոշակի եզրային պայմաններով սինգուլյար ինտեգրադիֆերենցիալ հավասարումների տեսքով։ Այնուհետև Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ այդ հավասարումները բերվում են քվազիլիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների համակարգերի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [2] *P. S. Theocaris, K. Dafermos*, Journ Appl. Mech., ser. E. vol. 31, № 4 (1964). [3] *В. В. Микаэлян*, ДАН АрмССР, т. 58, № 1 (1974). [4] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). [5] *Б. Л. Абрамян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972. [6] *E. Melan*, Ein Beitrag zyr Theorie geschweisster Verbinchungen Ingr-Arch; Bd3, № 2 (1932). [7] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [8] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 34, № 3 (1970). [9] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 33, № 5 (1969). [10] *N. K. Arutunnyan, S. M. Mkhitaryan*, Trends in elasticity and Thermoelasticity. Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971.