УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Г. Мхитарян

Об одном ортогональном интегральном соотношении и его
 приложении к контактным задачам теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 6/V 1982)

Ортогональные интегральные соотношения, переводящие одну полную ортогональную систему функций в другую, наряду со спектральными соотношениями играют важную роль при построении эффективного решения обширного класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в контактных и смешанных задачах теории упругости, в смешанных задачах теории теплопроводности и в других областях математической физики. Ряд результатов по таким соотношениям и их приложениям к разнообразным смешанным задачам приводится в работах Г. Я. Попова, достаточно полный обзор которых дан в коллективной монографии (1).

В настоящей статье при помощи одного интегрального соотношения для полиномов Якоби, установленного в (2), и примененного в (3) способа выводится ортогональное соотношение для бесселевых функций на полубесконечном интервале. Затем на основе этого соотношения строится замкнутое решение интегрального уравнения, описывающего контактную задачу нелинейной теории упругости о вдавливании полубесконечного штампа довольно общей конфигурации в деформирующуюся по степенному закону полуплоскость с учетом сил сцепления. Отметим, что в такой постановке задачи о вдавливании штампа конечных размеров в полуплоскость рассмотрены в (4-6), причем в последней работе учтены силы сцепления в контактной зоне.

1. В работе (2) установлено ортогональное интегральное соотношение

$$\int_0^1 \frac{[a \operatorname{sgn}(x-y) + b]^\sigma P_n^{(\alpha-1, \gamma-\alpha)}(1-2y)}{|x-y|^\gamma y^{1-\alpha} (1-y)^{\alpha-\gamma}} dy = \frac{A \pi \Gamma(n+\gamma)}{n! \Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^\sigma P_n^{(\gamma-\alpha, \alpha-1)}(1-2x), \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

где

$$A = \sqrt{1 - 2 \cos \pi \gamma a^\sigma + a^{2\sigma}}; \quad a_* = \frac{b-a}{b+a} \quad (\operatorname{Re} A > a)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sin \pi \gamma}{A}\right), \quad (0 < \operatorname{Re} \gamma < 1; \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1),$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полиномы Якоби, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. После перехода к новым переменным

$$x = u^2/4n^2, \quad y = v^2/4n^2$$

(1.1) переходит в следующее соотношение:

$$\int_0^{2n} \frac{[a \operatorname{sgn}(u^2 - v^2) + b]^\sigma n^{1-\alpha} P_n^{(\alpha-1, \gamma-\alpha)}\left(1 - \frac{v^2}{2n^2}\right) v}{|u^2 - v^2|^\gamma v^{2(1-\alpha)} \left(2 - \frac{v^2}{2n^2}\right)^{\alpha-\gamma}} dv =$$

$$= \frac{2^{\alpha-\gamma-1} A \pi}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^\sigma \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)} n^{\gamma-1} n^{\alpha-\gamma} P_n^{(\gamma-\alpha, \alpha-1)}\left(1 - \frac{u^2}{2n^2}\right).$$

Далее, воспользуемся известным соотношением (7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z)$$

и асимптотической формулой (8)

$$\frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+1)} \cong n^{\gamma-1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода индекса α .

В результате будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{[a \operatorname{sgn}(u^2 - v^2) + b]^\sigma J_{\alpha-1}(v) v}{|u^2 - v^2|^\gamma v^{1-\alpha}} dv = \frac{2^{-\gamma} \pi A}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^\sigma u^{\alpha-\gamma} J_{\gamma-\alpha}(u).$$

Наконец, перейдя к новым переменным

$$u = \lambda \sqrt{x}; \quad v = \lambda \sqrt{s} \quad (\lambda > 0),$$

придем к следующему ортогональному интегральному соотношению:

$$\int_0^\infty \frac{[a \operatorname{sgn}(x-s) + b]^\sigma s^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{s})}{|x-s|^\gamma} ds =$$

$$= \frac{2^{1-\gamma} \pi A}{\Gamma(\gamma) \sin \pi \gamma} (a+b)^\sigma \lambda^{\gamma-1} x^{\frac{\alpha-\gamma}{2}} J_{\gamma-\alpha}(\lambda \sqrt{x}), \quad (\lambda > 0),$$

переводящему одно семейство бесселевых функций в другое.

2. Перейдем теперь к постановке контактной задачи. Пусть полубесконечный штамп, основание которого характеризуется функцией $g(x)$, под действием вертикальных сил, распределенных по всей его длине, и момента вдавливается в полуплоскость. При этом предполагается, что штамп движется лишь поступательно в вертикальном направлении, в контактной зоне учитываются силы сцепления, а для

материала полуплоскости справедлива степенная физическая зависимость

$$\sigma_l = K_0 \varepsilon_l^\mu, \quad (0 < \mu < 1), \quad (2.1)$$

где K_0 — определенная физическая константа, μ — показатель ползучести, а σ_l и ε_l — интенсивности напряжений и скоростей деформаций. Требуется определить распределение нормальных и тангенциальных контактных напряжений, обозначаемых $p(x)$ и $q(x)$ соответственно.

Придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции (4.5), указанную задачу, как в (6), математически можно формулировать в виде следующего интегрального уравнения с эрмитовым ядром:

$$\int_0^\infty \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} \chi(s) ds = f(x), \quad \left(|\nu| < \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2} \right), \quad (2.2)$$

где

$$\chi(x) = p(x) - i \frac{J_1(\mu)}{J_2(\mu)} q(x); \quad h = 1 - \mu \quad (1/2 < \mu < 1);$$

$$\nu = \left(\operatorname{ctg} \frac{\beta\pi}{2} \right)^{1-h}; \quad (0 < h < 1); \quad \beta = \frac{1}{\mu} \sqrt{2\mu - 1};$$

$$J_1(\mu) = 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \beta \vartheta)^\mu \cos \vartheta d\vartheta; \quad J_2(\mu) = 4 \int_0^{\pi/2} (\sin \beta \vartheta)^\mu \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$f(x) = [\sigma_0 - g_0(x)]^h.$$

Здесь δ_0 характеризует осадку штампа как одного целого, а $g_0(x)$ — комплекснозначная функция, известным образом связанная с функцией $g(x)$ (6). Поскольку по всей контактной зоне полубесконечный штамп сцеплен с основанием, то должно выполняться условие

$$\left| \frac{q(x)}{p(x)} \right| < \rho,$$

где ρ — коэффициент кулоновского трения, которое исключает возможность скольжения штампа вдоль границы полуплоскости.

Отметим, что интегральное уравнение (2.2) должно рассматриваться при условии

$$\int_0^\infty p(x) dx = \int_0^\infty \chi(x) dx = P < \infty, \quad (2.3)$$

где P — равнодействующая прижимающих штамп вертикальных сил.

Теперь заметим, что вследствие известного представления (8)

$$\frac{1 - i\nu \operatorname{sgn} x}{|x|^h} = \frac{\Gamma(1-h)}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} \left(\sin \frac{\pi h}{2} - \nu \cos \frac{\pi h}{2} \operatorname{sgn} \lambda \right) |\lambda|^{h-1} d\lambda$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad (2.4)$$

на основе теоремы Бохнера—Хинчина порождается указанной функцией эрмитово ядро

$$K(x, s) = \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} \quad (-\infty < x, s < \infty)$$

при $|\nu| < \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2}$ является положительно-определенным ядром. Поэтому уравнение (2.2) в пространстве $L_2(0, \infty)$ имеет единственное решение.

Далее, сравнивая асимптотики левых и правых частей (2.2) при $x \rightarrow \infty$, находим, что функция $g_0(x)$ не должна быть произвольной функцией, а именно, на бесконечности она должна обладать асимптотическим поведением

$$g_0(x) \cong \delta_0 \frac{\sqrt[2h]{P^2(1+\nu^2)}}{|x|} e^{-i\varphi/h}, \quad (x \rightarrow \infty), \quad (2.5)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \nu$

Из (2.5) фактически определяется δ_0 , т. е. эта постоянная априори входит в структуру функции (2.6).

Равенство (2.6) характеризует своеобразие постановки задачи о полубесконечном штампе.

Теперь приступим к построению решения уравнения (2.2). Исходя из (1.2), его решение представим в виде

$$\chi(x) = x^{\frac{\alpha-1}{2}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x}) d\lambda. \quad (2.6)$$

При этом в (1.2) положим

$$a = -i\nu, \quad b = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \gamma = h.$$

Тогда это соотношение переходит в следующее:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{1 - i\nu \operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^h} s^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{s}) ds = \\ & = \frac{2^{1-h} \pi A}{\Gamma(h) \sin \pi h} (1 - i\nu) \lambda^{h-1} x^{\frac{\alpha-h}{2}} J_{h-\alpha}(\lambda \sqrt{x}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где в разбираемом случае

$$A = \frac{1}{1+\nu^2} \sqrt{(1+\nu^2)^2 - 2 \cos \pi h (1+\nu^2)(1+i\nu)^2 + (1+i\nu)^4} \quad (\operatorname{Re} A > 0);$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sin \pi h}{A} \right), \quad (0 < \operatorname{Re} \alpha < 1).$$

Далее, (2.6) подставим в уравнение (2.2), поменяем порядок интегрирования и воспользуемся соотношением (2.7). В результате будем

иметь

$$\int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{h-\alpha}(\lambda\sqrt{x}) \lambda^{h-1} d\lambda = \frac{\Gamma(h) \sin \pi h}{2^{1-h} \pi (1-i\nu) A} x^{\frac{h-\alpha}{2}} f(x).$$

Отсюда по формуле обращения Ханкеля

$$\Phi(\lambda) = \frac{\Gamma(h) \sin \pi h}{\pi A 2^{2-h} (1-i\nu)} \lambda^{2-h} \int_0^{\infty} J_{h-\alpha}(\lambda\sqrt{x}) x^{\frac{h-\alpha}{2}} f(x) dx. \quad (2.8)$$

Таким образом, решение определяющего уравнения (2.2) дается формулами (2.6) и (2.8). При этом на основе известных асимптотических формул для бесселевых функций (7) условие сходимости интеграла из (2.8) имеет вид

$$0 \leq \operatorname{Re} \xi \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, h-1-\operatorname{Re} z \right\};$$
$$\operatorname{Re} \gamma \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3+2h}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} z \right\}.$$

Здесь положено

$$f(x) = O(x^{-3}) \quad (x \rightarrow 0); \quad f(x) = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

и учтена квадратичная суммируемость функции $f(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Анализ формулы (2.6) показывает, что показатель особенности контактных напряжений на конце штампа $x=0$ меньше, чем традиционная в классической теории упругости квадратичная особенность. Следовательно, можно утверждать, что постановка контактной задачи о вдавливании полубесконечного штампа в полуплоскость, основанная на нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости (2.1), приводит к снижению концентрации контактных напряжений на конце штампа.

Отметим, что уравнением (2.2) описывается также аналогичная задача о полубесконечном штампе в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости полуплоскости по глубине изменяется по степенному закону (9).

В заключение приношу благодарность С. М. Мхитаряну за оказанную помощь во время работы над этой статьей.

Ереванский институт
народного хозяйства

Վ. Գ. ՄԻԻՔԱՐՅԱՆ

Օրրոգոնալ ինտեգրալ մի առնչության և առաձգականության
տեսության կոնտակտային խնդիրներում նրա կիրառության մասին

Աշխատանքում արտածվում է կիսաանվերջ ինտեգրալի վրա մի օրթոգոնալ
ինտեգրալ առնչություն, որը պարունակում է Բեսելի առաջին սերի ֆունկ-

ցիաներ: Այդ առնչության օգնությամբ կառուցվում է աստիճանային օրենքով դեֆորմացվող կիսահարթությունը կիսաանվերջ դրոշմի սեղմման կոնտակտային խնդրի փակ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Г. Я. Попов, ПММ, т. 31, № 2 (1967). ³ С. М. Мхитарян, ДАН АрмССР, т. 74, № 4 (1982). ⁴ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 23, № 5 (1959). ⁵ Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян, ПММ, т. 27, № 5 (1963). ⁶ С. А. Енгибарян, ДАН АрмССР, т. 67, № 1 (1978). ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. 2, Наука, М., 1974. ⁸ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. 1, Наука, М., 1973. ⁹ Г. Я. Попов, ПММ, т. 37, № 2 (1973).