ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 2

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

Е. С. Марутян

О n-ядре суммы кооперативных игр с континуумом участников

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 26/V 1982)

Принцип оптимальности, называемый в теории игр n-ядром, был введен Д. Шнейдлером в работе [1] для игр n-лиц в форме характеристической функции. Задачу распространения этого понятия на игры с бесконечным множеством игроков впервые рассмотрел Ч. Берд (см. [2]). Целью данной работы является описание n-ядра для суммы игр с континуумом участников вообще и для выпуклых игр в частности.

Игрой называется тройка $(I, \mathscr{E}, v)$, где $(I, \mathscr{E})$ есть основное пространство игроков, изоморфное $([0, 1], \mathscr{B})$ ($\mathscr{B}$—борелевская σ-алгебра подмножеств $[0, 1]$), а v есть такая ограниченная функция множества, что $v: \mathscr{E} \to R_+$ и $v(\varnothing)=0$. Элементы $\mathscr{E}$ будем называть коалициями. Обозначим через $V(I, \mathscr{E})$ множество всех игр, определенных на $(I, \mathscr{E})$. Предполагается, что $V(I, \mathscr{E})$ снабжено топологией, в которой для $v_0 \in V(I, \mathscr{E})$ база окрестностей имеет вид

$$\{v/\forall j=\overline{1, n}, |v_0(A_j)-v(A_j)|<\varepsilon\}, \text{ где } \{A_j\}_1^n \subset \mathscr{E}, \text{ а } \varepsilon>0.$$

Будем рассматривать определенные в [3] пространство $B(I, \mathscr{E})$, сопряженное к нему $\mathrm{ba}(I, \mathscr{E})$ и ba-слабую топологию $\sigma(\mathrm{ba}, B)$ на B.

Множество дележей игры v в общем случае определяется следующим образом:

$$D(v)=\{\mu \in \mathrm{ba}_+(I, \mathscr{E})/\mu(I)=v(I)\}.$$

ε—c-ядром игры v называется следующее множество:

$$C^\varepsilon(v)=\{\mu \in D(v)/\mu(S) \geqq v(S)-\varepsilon, \text{ для } \forall S \in \mathscr{E}\}.$$

При $\varepsilon=0$ $C^\varepsilon(v)$ превращается в c-ядро.

Аналогично [2] рассмотрим отношение предпочтения $\overset{*}{\succsim}$, заданное на множестве дележей $D(v)$ следующим образом: пусть $\mu_1, \mu_2 \in D(v)$, скажем, что $\mu_1 \overset{*}{\succsim} \mu_2$, если $\sup[v(S)-\mu_1(S)] < \sup[v(S)-\mu_2(S)]$, где супремум в левой и правой частях рассматривается по множествам $[S/\mu_1(S)<\mu_2(S)]$, $[S/\mu_2(S)<\mu_1(S)]$ соответственно.

Определим n-ядро $N(v)$ игры v следующим образом:

$$N(v)=\{\mu \in D(v)/\mu \overset{*}{\succsim} \lambda, \ \forall \lambda \in D(v)\}.$$

Если J есть некоторое множество индексов, то суммой игр $(I, \mathscr{E}, v_j)$ называется игра $(I, \mathscr{E}, v)$, где $v(S)=\sup\limits_{j \in J}\{v_j(S)\}$.

Предложение 1. Пусть $(I, \mathscr{E}, v)$ есть сумма конечного числа игр $\{(I, \mathscr{E}, v_k)=\Gamma_k\}_{k=\overline{1, n}}$, т. е.

$$v(S)=\max_{1\leq k\leq n} \{v_k(S)\}_{k=\overline{1, n}}.$$

Тогда, если

$$a=\max_k\{v_k(I)\},\ C_a^\varepsilon(v_k)=\{\mu\in \mathrm{ba}\,(I, \mathscr{E})/\mu(I)=a,\ \mu(S)\geq v_k(S)-\varepsilon\},$$

$$\varepsilon_0=\min\left\{\varepsilon/\bigcap_{k=1}^{n} C_a^\varepsilon(v_k)\neq\varnothing\right\},$$

то имеют место следующие включения:

$$\bigcap_{k=1}^{n} N(v_k)\subseteq N(v)\subseteq\bigcap_{k=1}^{n} C_a^{\varepsilon_0}(v_k)$$

Пусть $C^\varepsilon(v)$ есть минимальное ε—c-ядро игры v. Приводимое ниже утверждение устанавливает полунепрерывность сверху (см. например ([4])) отображения $F: v\to C^\varepsilon(v)$.

Предложение 2. Отображение $F: v\to C^\varepsilon(v)$ слабо полунепрерывно сверху в топологии $\sigma(\mathrm{ba}, B)$.

Замечание. Если задана система игр $\{(I, \mathscr{E}, u_j)\}_{j\in J}$, J есть направленное множество, $v_{j_0}(S)=\sup\limits_{j<j_0} u_j(S)$, $v(S)=\sup\limits_{j\in J}\{u_j(S)\}$, то из предложения 2 следует, что $\lim\limits_j C^\varepsilon j(v_j)\subset C^\varepsilon(v)$.

Определение. Игра v называется σ-полунепрерывной снизу (сверху), если для любой $S\in\mathscr{E}$ и для любой неубывающей (невозрастающей) последовательности $S_n\uparrow S(S_n\downarrow S)$ имеет место $v(S_n)\to v(S)$. σ-непрерывными будем называть те игры, которые всюду одновременно σ-полунепрерывны и снизу и сверху.

Предложение 3. Если игра $(I, \mathscr{E}, v)$ обладает c-ядром и σ-непрерывна в I или в $\varnothing$, то $N(v)=C(v)$.

Определение. Заданная на измеримом пространстве игроков $(I, \mathscr{E})$ игра v называется выпуклой, если для любых $S, T\in\mathscr{E}$ $v(S)+ +v(T)\leq v(S\bigcup T)+v(S\bigcap T)$. Класс всех выпуклых игр будем обозначать через V_c. Для $T\in\mathscr{E}$ обозначим через $\mathscr{L}^T$ множество всех конечных измеримых разбиений T.

Определение. Пусть $T\subset S$. Маргинальной мерой коалиции S назовем следующую функцию множества:

$$\mu^S(T)=\sup_{\Lambda\in\mathscr{L}^T}\sum_{k=1}^{|\Lambda|}\{v(S)-v(S, T_k)\},$$

где $\Lambda=\{T_k\}_1^{|\Lambda|}$, $T_k\in\mathscr{E}$.

Заданная таким образом маргинальная мера является обобщением соответствующего понятия для игр с конечным множеством игроков.

Предложение 4. Если $v\in V_c$, то $\mu^S\in \mathrm{ba}_+(I, \mathscr{E})$ и сосредоточена на S.

Обозначим через V_c' класс всех σ-непрерывных в I выпуклых игр.

Замечание. Если $v \in V_c$, то μ^S счетно-аддитивна. Введем следующую величину: $\alpha_S = \mu^S(S) - v(S)$, $\alpha_S \geqq 0$, в силу того, что $(I, \mathscr{E}, v)$ является кооперативной игрой.

Предложение 5. Если $v \in V_c$, то

$$v(\cdot) = \sup_{S \in \mathscr{E}} \{\mu^S(\cdot) - \alpha_S\}. \tag{1}$$

Теперь на $(I, \mathscr{E})$ рассмотрим игру $u(S) = (\mu(S) - \alpha)^+ = \max(0, \mu(S) - \alpha)$, где $\alpha \geqq 0$.

Предложение 6. $C(u) = \{\nu \in \mathrm{ba}_+(I, \mathscr{E}) / \nu(S) = \mu(S) - \alpha\lambda(S)\}$, где $\lambda \in \mathrm{ba}(I, \mathscr{E})$ есть знакопеременная мера, с $\lambda(I) = 1$.

Предположим, что J есть направленное множество индексов, соответствующее аффинным функциям множества из формулы (1) предложения 4. Обозначим через $v_{j_0}(S) = \sup_{j < j_0} \{\mu^j(S) - \alpha_j\}$.

Тогда получаем следующую теорему.

Теорема. Если $(I, \mathscr{E}, v)$ выпуклая, σ-непрерывная игра, то имеют место следующие утверждения:

1. $v(\cdot) = \sup_{j \in J} \{\mu^j(\cdot) - \alpha_j\}$;

2. $C(v) = \bigcap_{j \in J} C^0_{v(I)}(u^j)$;

3. $N(v^j) \subseteq C(v_j)$, $\lim_j N(v_j) \subset N(v) = C(v)$, если $v_j \to v$.

Замечание. Условие выпуклости достаточно, но не необходимо для представления 1.

Приведем два примера. Предварительно предположим, что $(I, \mathscr{E}) = ([0, 1], \mathscr{B})$.

В предлагаемых ниже примерах строятся игры с n-ядрами, состоящими из единственного дележа, причем в первой игре этот дележ вполне конечно-аддитивен и носит несколько патологический характер в том смысле, что сосредоточен на одном-единственном игроке.

Пример 1. Игра задана следующей характеристической функцией:

$$v(S) = \begin{cases} 1, \text{ если существует такой } x \in [0, 1], \text{ что } S = [x, 1] \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из определения характеристической функции следует, что игрок, на котором сосредоточен дележ, составляющий n-ядро, должен соответствовать точке 1.

Пример 2. Задана игра $v = f \circ \mu$, где $\mu \in \mathrm{NA}^1$ есть скалярная мера, а $f \in C_{[0,1]}$ и удовлетворяет следующему условию: существует такой отрезок $[c, d] \subset (0, 1)$, что $f(x) \geqq x$ при $x \in [c, d]$.

Для таких игр n-ядро ([2]) есть следующее множество

$$N(v) = \{\nu \in \mathrm{NA}^1 / \min_{\lambda \in D(v)} \sup_{S \in \mathscr{B}} [v(S) - \lambda(S) = \sup_{S \in \mathscr{B}} [v(S) - v(S)] = M\}.$$

Лемма. Пусть для $x \in (0, 1)$ $B_\mu(x) = \{S \in \mathscr{B} / \mu(S) = x\}$. Если для некоторых $\mu, \nu \in \mathrm{NA}^1$ существует такой $x \in (0, 1)$, что $B_\mu(x) = B_\nu(x)$, то $\mu \equiv \nu$.

Единственность n-ядра в этом примере доказываем следующим образом. Сначала замечаем, что мера μ минимизирует функционал $e_v(\lambda)=\sup_{S\in\mathcal{B}}\{v(S)-\lambda(S)\}$, т. е. $\mu\in N(v)$. Отсюда на основе леммы и условия, наложенного на функцию f, из определения игры следует, что любая другая мера с таким же свойством должна совпадать с μ.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ե. Ս. ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Կոնտինուում մասնակիցներով կոոպերատիվ խաղերի գումարի կորիզի մասին

Հոդվածում տրված է կոնտինուում մասնակիցներով խաղերի գումարի, ինչպես նաև՝ ուռուցիկ խաղերի n-կորիզի նկարագիրը։ Ցույց է տրված, որ $v(S)=\sup_{j\in J}\{v_j(S)\}$ *տիպի խաղերի n—կորիզը հանդիսանում է բաղադրիչ խաղերի ε—C-կորիզների հատման բազմության ենթաբազմություն։*

Ապացուցվում է նաև, որ համանման ներկայացում է թույլ տալիս նաև անընդհատ ուռուցիկ խաղի n-կորիզը, երբ իբրև խաղ-բաղադրիչներ վերցված են որոշակի տիպի բազմության աֆինական ֆունկցիաներ։ Վերջում բերվում են կոնտինուում խաղացողներով խաղերի օրինակներ, որոնց n-կորիզը միակն է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D Schmeidler*, SIAM. J. Appl. math., vol. 17, № 6 (1969). [2] *Charles Bird*, J. Appl. math., vol. 31, № 3 (1976). [3] *Н. Данфорд, Дж. Шварц*, Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962. [4] *А. М. Рубинов*, Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам, Наука, Л., 1980.