УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Уравновешенные сверхтождества длины три

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/V 1982)

1. *Классификация по выполнимости.* Уравновешенные тождества длины 3 изучены В. Д. Белоусовым ⁽¹⁾, А. Садам ⁽²⁾, Б. Трпеновским ⁽³⁾ и др. В настоящей работе приводятся результаты исследований сверхтождеств (т. е. тождеств с переменными операциями), определенных по этим равенствам. В смысле выполнимости сверхтождества, определенные по равенству ассоциативности $x \cdot yz = x(y \cdot z)$, рассмотрены в ⁽⁴⁾.

Универсальная алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ с бинарными операциями называется обратимой, если для любой операции $A \in \Sigma$ группоид $Q(A)$ — квазигруппа. Все рассматриваемые здесь алгебры — обратимые алгебры, хотя многие результаты (в подходящей формулировке) можно распространить и на другие классы алгебр (например, на класс моноидальных систем ⁽⁴⁾).

Алгебра $\langle Q; \Sigma \rangle$ называется нетривиальной, если порядок $|\Sigma| > 1$. Сверхтождество называется нетривиальным, если в нем участвуют хотя бы два различных символа операций. Легко заметить, что если в нетривиальной обратимой алгебре выполняется сверхтождество, определенное по одному из уравновешенных тождеств длины 3, то каждый символ операции должен в нем повторяться хотя бы два раза (это следует и из более общего результата об одиночных операциях ⁽⁵⁾). Следовательно каждое из указанных тождеств порождает три нетривиальных сверхтождества (из них $X[x, Y(y, z)] = X[x, Y(y, z)]$ и $X[Y(x, y), z] = X[Y(x, y), z]$ выполняются в классе всех бинарных алгебр):

$$X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(y, z)] \quad (1.1)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[x, Y(y, z)] \quad (1.2)$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[x, Y(z, y)] \quad (2.1)$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(z, y)] \quad (2.2)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[x, Y(z, y)] \quad (2.3)$$

$$X[x, Y(y, z)] = X[y, Y(x, z)] \quad (3.1)$$

$$X[x, Y(y, z)] = Y[y, X(x, z)] \quad (3.2)$$

$$X[x, X(y, z)] = Y[y, Y(x, z)] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[y, Y(z, x)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[y, X(z, x)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[y, Y(z, x)] \end{aligned} \quad (4.1) - (4.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[z, Y(y, x)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[z, X(y, x)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[z, Y(y, x)] \end{aligned} \quad (6.1) - (6.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(x, z), y] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(x, z), y] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(x, z), y] \end{aligned} \quad (8.1) - (8.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(y, z), x] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(y, z), x] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(y, z), x] \end{aligned} \quad (10.1) - (10.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= Y[X(x, y), z] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(x, y), z] \end{aligned} \quad (12.1), (12.2)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(x, z), y] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(x, z), y] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(x, z), y] \end{aligned} \quad (14.1) - (14.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(y, z), x] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(y, z), x] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(y, z), x] \end{aligned} \quad (16.1) - (16.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[z, Y(x, y)] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[z, X(x, y)] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[z, Y(x, y)] \end{aligned} \quad (5.1) - (5.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(y, x), z] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(y, x), z] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(y, x), z] \end{aligned} \quad (7.1) - (7.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(z, x), y] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(z, x), y] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(z, x), y] \end{aligned} \quad (9.1) - (9.3)$$

$$\begin{aligned} X[x, Y(y, z)] &= X[Y(z, y), x] \\ X[x, Y(y, z)] &= Y[X(z, y), x] \\ X[x, X(y, z)] &= Y[Y(z, y), x] \end{aligned} \quad (11.1) - (11.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(y, x), z] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(y, x), z] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(y, x), z] \end{aligned} \quad (13.1) - (13.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(z, x), y] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(z, x), y] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(z, x), y] \end{aligned} \quad (15.1) - (15.3)$$

$$\begin{aligned} X[Y(x, y), z] &= X[Y(z, y), x] \\ X[Y(x, y), z] &= Y[X(z, y), x] \\ X[X(x, y), z] &= Y[Y(z, y), x] \end{aligned} \quad (17.1) - (17.3)$$

Для краткости высказывание „в обратимой алгебре $\langle Q; \Sigma \rangle$ выполняется сверхтождество (n) “ записывается „ $\langle Q; \Sigma \rangle \models (n)$ “.

Теорема 0. 1. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (1.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i \mid A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$, где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а отображения λ_i — перестановочные между собою право-регулярные подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$.

2. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (1.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i \mid A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$, где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а подстановка $\lambda_i: Q \rightarrow Q$ удовлетворяет условию $\lambda_i(x \cdot y) = x \cdot \lambda_i^{-1}y$.

3. $\langle Q; \Sigma \rangle \models (12.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i \mid A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\}$,

где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а отображения λ_i — перестановочные между собою лево-регулярные подстановки этой квазигруппы.

$$4. \langle Q; \Sigma \rangle | = (12.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — квазигруппа, а $\lambda_i: Q \rightarrow Q$ — подстановка с условием $\lambda_i(x \cdot y) = \lambda_i^{-1}x \cdot y$.

$$5. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = A_i(y, x)\}.$$

$$6. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — коммутативная квазигруппа, отображения λ_i — перестановочные между собою право-регулярные подстановки квазигруппы $Q(\cdot)$.

$$7. \langle Q; \Sigma \rangle | = (2.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \lambda_i(x \cdot y)\},$$

где $Q(\cdot)$ — коммутативная квазигруппа, а $\lambda_i: Q \rightarrow Q$ — подстановка с условием $\lambda_i(x \cdot y) = x \cdot \lambda_i^{-1}y$.

8. В классе всех обратимых алгебр сверхтождества (2.1), (10.1), (11.1) и (13.1), сверхтождества (2.2), (10.2), (11.2) и (13.2), далее — (2.3), (10.3), (11.3) и (13.3) эквивалентны (в смысле выполнимости).

$$9. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$, $\alpha: Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$10. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \alpha_i x \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $\alpha_i: Q \rightarrow Q$ — подстановка.

$$11. \langle Q; \Sigma \rangle | = (3.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, t_i^2 не зависит от индекса i , $\alpha: Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$12. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ \alpha y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$, $\alpha: Q \rightarrow Q$ — фиксированная подстановка.

$$13. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ \alpha_i y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $\alpha_i: Q \rightarrow Q$ — подстановка.

$$14. \langle Q; \Sigma \rangle | = (14.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ \alpha y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, t_i^2 не зависит от индекса i , $\alpha: Q \rightarrow Q$ — некоторая подстановка.

$$15. \langle Q; \Sigma \rangle | = (4.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \in Q$.

$$16. \langle Q; \Sigma \rangle | = (4.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(xy) = x \circ t_i \circ y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, $t_i \circ t_i = e$.

17. В классе всех обратимых алгебр

i) сверхтождества (4.1), (4.2), (15.1), (15.2), (5.1), (5.2), (16.1),

(16.2), (7.1), (7.2), (8.1), (8.2), (9.1), (9.2) эквивалентны (в смысле выполнимости).

ii) сверхтождества (4.3), (15.3), (5.3), (16.3), (7.3), (8.3), (9.3) также эквивалентны.

$$18. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм, $t_i \in Q$.

$$19. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i \circ \varphi$, для некоторого фиксированного элемента $t_i \in Q$.

$$20. \langle Q; \Sigma \rangle | = (6.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi^2 x \circ t_i \circ \varphi y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i^{-1} \circ \varphi$, для некоторого фиксированного элемента $t_i \in Q$.

$$21. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.1) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм, $t_i \in Q$.

$$22. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.2) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i \circ \varphi$, для некоторого фиксированного элемента $t_i \in Q$.

$$23. \langle Q; \Sigma \rangle | = (17.3) \Leftrightarrow \Sigma = \{A_i | A_i(x, y) = \varphi x \circ t_i \circ \varphi^2 y\},$$

где $Q(\circ)$ — абелева группа, φ — ее автоморфизм со свойством $\varphi t_i = t_i^{-1} \circ \varphi$, для фиксированного $t_i \in Q$.

З а м е ч а н и е. Если порядок $|\Sigma| = 1$, то, как вытекает из свойств 9 и 12, условие $p(0) = 0$ в описании 1.3 статьи (6) оказывается лишним.

2. *Изотопные замыкания сверхтождеств.* Класс алгебр Λ называется изотопным замыканием формулы Φ , внутри класса всех обратимых алгебр, если Λ содержит те и только те обратимые алгебры, каждая из которых изотопна алгебре, в которой истинна формула Φ . В аналогичном смысле понимается и изотопное замыкание системы формул. В частности мы здесь определяем изотопные замыкания некоторых сверхтождеств.

Два сверхтождества (или две формулы) назовем изотопно-эквивалентными, если внутри класса всех обратимых алгебр их изотопные замыкания совпадают. Начнем с понятия изотопии: бинарные алгебры $\langle Q; \Sigma \rangle$ и $\langle Q'; \Sigma' \rangle$ называются изотопными, если существуют биективные отображения $\alpha, \beta, \gamma: Q \rightarrow Q'$ и $\tilde{\varphi}: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ такие, что $\alpha A(x, y) = [\tilde{\varphi} A](\beta x, \gamma y)$ для любой операции $A \in \Sigma$ и для любых $x, y \in Q$.

Теорема 1. *Внутри класса всех обратимых алгебр*

а) *изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z])$*

определяется импликацией

$$Y(x_1, y_0) = Y(x_0, y_1)$$

$$Y(x_1, y_2) = Y(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \quad (18)$$

$$X(x_2, y_1) = Y(x_3, y_0)$$

б) изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (Y[x, X(y, z)] = X[Y(x, y), z])$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ Y(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (19)$$

в) изотопное замыкание формулы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[Y(x, y), z] = X[x, Y(y, z)])$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow Y(x_3, y_2) = Y(x_2, y_3); \\ X(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (20)$$

г) изотопное замыкание системы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (Y[x, Y(y, z)] = X[X(x, y), z]); X[Y(x, y), z] = Y[X(x, y), z]$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_0) &= X(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= X(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2), \\ Y(x_2, y_1) &= X(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

причем из формулы (21) следуют формулы (18) и (20);

д) изотопное замыкание системы $\exists Y \forall X \forall x, y, z (X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z]); X[x, Y(y, z)] = Y[x, X(y, z)]$

определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_0) &= Y(x_0, y_1) \\ X(x_1, y_2) &= Y(x_0, y_3) \rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2), \\ Y(x_2, y_1) &= Y(x_3, y_0) \end{aligned} \quad (22)$$

причем из формулы (22) следуют формулы (19) и (20).

Следствие. В классе всех обратимых алгебр

е) изотопное замыкание сверхтождества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), z] \quad (23)$$

определяется конъюнкцией формул (18) и (19);

ж) изотопное замыкание сверхтождества ассоциативности

$$X[x, Y(y, z)] = X[Y(x, y), z] \quad (24)$$

определяется конъюнкцией формул (18), (19) и (20);

з) изотопное замыкание сверхтождества ассоциативности

$$X[x, X(y, z)] = Y[Y(x, y), z] \quad (25)$$

определяется конъюнкцией формул (19) и (21) (что равносильно конъюнкции формул (18) и (22)).

Теорема 2. Внутри класса всех обратимых алгебр

и) изотопное замыкание сверхтождества (3.2) определяется импликацией

$$\begin{aligned} X(x_1, y_2) = X(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_1, y_3) = Y(x_3, y_1) & \end{aligned} \quad (26)$$

к) изотопное замыкание сверхтождества (14.2) определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_2) = Y(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2); \\ X(x_1, y_3) = Y(x_3, y_1) & \end{aligned} \quad (27)$$

л) изотопное замыкание сверхтождества (4.3) определяется импликацией

$$\begin{aligned} Y(x_1, y_2) = Y(x_2, y_1) &\rightarrow X(x_2, y_3) = Y(x_3, y_2). \\ Y(x_1, y_3) = X(x_3, y_1) & \end{aligned}$$

Следствие. Внутри класса всех обратимых алгебр

м) изотопное замыкание сверхтождества (4.1) определяется конъюнкцией формул (26) и (27);

н) сверхтождества (4.1), (3.1), (14.1), (6.1), (6.2), (17.1) и (17.2) изотопно-эквивалентны;

о) сверхтождества (4.3), (3.3) и (14.3) изотопно-эквивалентны;

п) изотопное замыкание сверхтождества (6.3) (или (17.3)) содержит изотопное замыкание сверхтождества (4.3) и содержится в изотопном замыкании сверхтождества (4.1).

Важность полученных сравнений (как в смысле выполнимости, так и изотопной эквивалентности) связана с тем, что внутри класса всех обратимых алгебр сверхтождества (4.1) (или (4.3)) эквивалентны системе сверхтождеств ассоциативности и коммутативности:

$$(4.1) \sim \left\{ \begin{array}{l} (23) \\ X(x, y) = X(y, x) \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} (24) \\ X^*(x, y) = X(y, x); \end{array} \right. \quad (4.3) \sim \left\{ \begin{array}{l} (25) \\ X(x, y) = X(y, x). \end{array} \right.$$

Попутно получен отрицательный ответ на вопрос 6 книги (7).

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Երեք երկարությամբ հավասարակշռված գերնույնություններ

Աշխատանքում նկարագրվում են երեք երկարությամբ օժտված բոլոր հավասարակշռված գերնույնությունները՝ հակադարձելի հանրահաշիվների դասում: Այդ գերնույնությունները դասակարգվում են ըստ իրացնելիության, այնուհետև որոշվում են մի շարք գերնույնությունների իզոտոպ փակույթները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. Д. Белоусов, Мат. сб., т. 70 (112), № 1 (1966). ² A. Sade, Amer. Math. Monthly, vol. 68, № 4 (1961). ³ Б. Трпеновски, Годишен зб. Природно-матем. фак. Ун-т Скопье, 13, 33—43 (1960). ⁴ Ю. М. Мовсисян, ДАН АрмССР, т. 62, № 5 (1976). ⁵ J. Aczél, Algebra Univers. I, N 1 (1971). ⁶ J. Jezek, T. Kerka, Check. Math. J., 29 (1979). ⁷ В. Д. Белоусов, Алгебраические сети и квазигруппы, Штиница, Кишинев, 1971.