ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Опровержение одной гипотезы Томассена

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/V 1982)

Рассматриваются конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([1]). Бонди ([2]) высказал гипотезу: каждый $(n-1)$-регулярный сильно связный орграф с n вершинами, кроме D_5 и D_7, является гамильтоновым (орграфы D_5 и D_7 изображены на рис. 1). Напомним, что орграф G называется m-регулярным, если для любой его вершины x имеет место $d(x)=\mathrm{id}(x)+\mathrm{od}(x)=m$. Орграф G называется k-связным, если для любых двух его вершин x и y существует k вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y. Томассен в ([3]) построил примеры орграфов, для которых предположение Бонди не верно. Все эти построенные орграфы являются односвязными; Томассеном ([3]) (см. также ([4]), гипотеза 1. 4. 1) была выдвинута гипотеза: любой 2-связный $(n-1)$-регулярный орграф с n вершинами, кроме D_5 и D_7, является гамильтоновым.

В настоящей статье опровергается эта гипотеза.

Пусть G—орграф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин G, а через $E(G)$—множество его дуг. Для $A,\ B\subseteq V(G)$ введем обозначения:

$$E(A\to B)=\{(y,\ z)/y\in A,\ z\in B\},$$
$$E(A,\ B)=E(A\to B)\cup E(B\to A).$$

Пусть H_1—орграф, изображенный на рис. 1.

Рис. 1

Для любого $k\geqslant 2$ определим орграф H_k следующим образом (см. рис. 2). Возьмем k копий $H_1^1,\ H_1^2,\ \ldots,\ H_1^k$ орграфа H_1 и добавим между этими копиями все дуги из множеств $E(A,\ A)$, $E(C,\ C)$,

$E(D \to A)$, $E(C \to D)$ и $E(B, D)$, где $A=\{x/x=a\in V(H_1^i)\}$, $B=\{x/x=b\in \in V(H_1^i)\}$, $C=\{x/x=c\in V(H_1^i)\}$ и $D=\{x/x=d\in V(H_1^i)\}$, $1\leqslant i\leqslant k$.

Утверждение 1. *Для любого $k\geqslant 1$ орграф H_k является k-связным.*

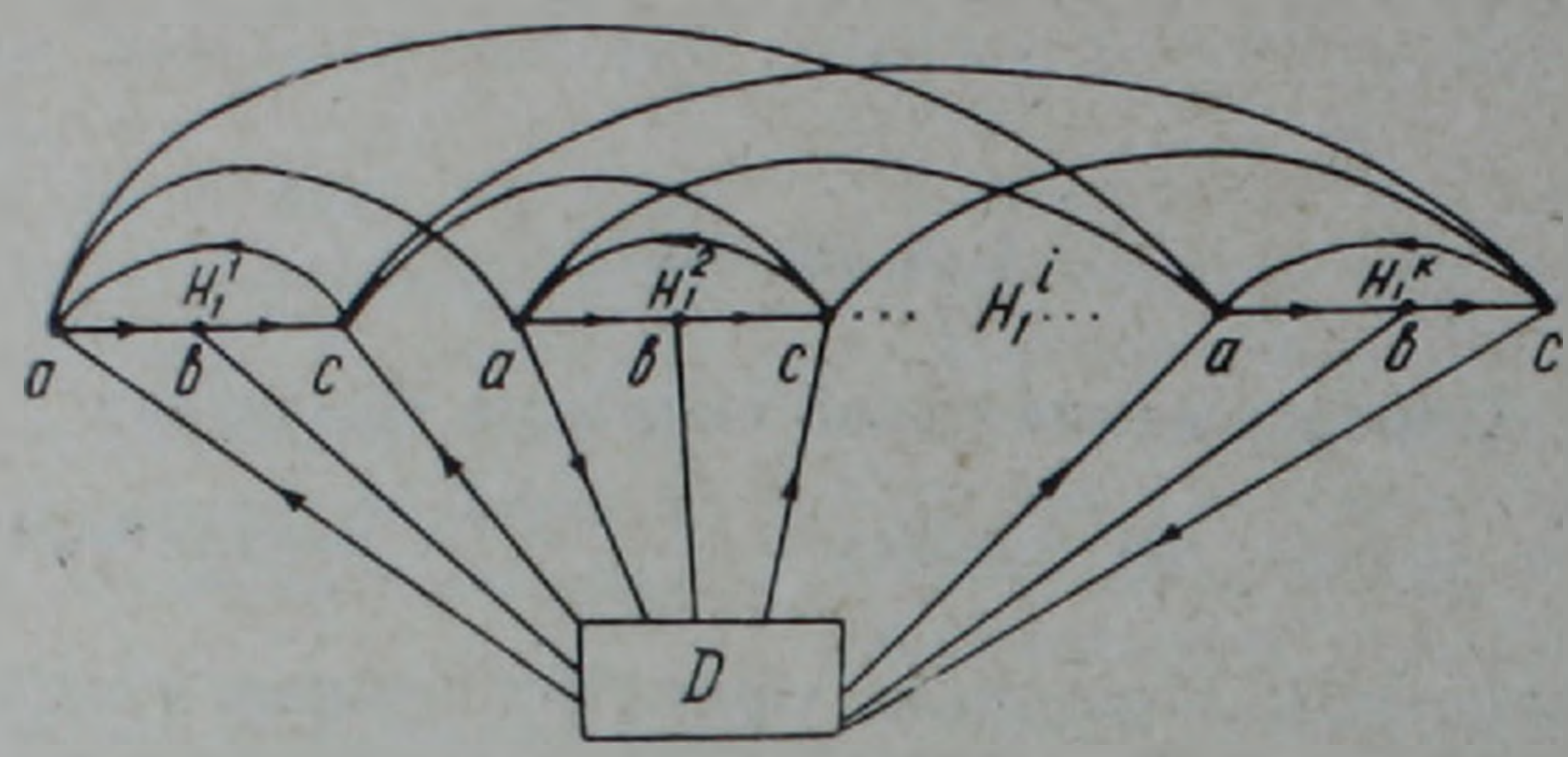

Рис. 2. Орграф H_k

Доказательство. Простой проверкой можно убедиться, что при $k\leqslant 2$ орграф H_k является k-связным. Допустим, что утверждение справедливо для всех $i\leqslant k-1$, $k\geqslant 3$. Пусть x и y произвольные вершины орграфа H_k. Тогда x, y принадлежат некоторому орграфу $H_{k-1}\subset H_k$. Следовательно, по индуктивному предположению в H_{k-1} существует $k-1$ вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y. Кроме того, так как $H_k\setminus H_{k-1}=H_1$ является сильно связным и вершина x (соответственно y) смежна к (соответственно из) некоторой вершине $H_k\setminus H_{k-1}$, то в H_k существует путь из вершины x в вершину y, который проходит только через вершины $H_k\setminus H_{k-1}$. Значит в H_k существует k вершинно-непересекающихся путей из вершины x в вершину y, т. е. H_k является k-связным.

Пусть Q_k^1 орграф, который получается из H_k после добавления одной новой вершины x, которая соединяется с вершинами H_k всеми дугами из множеств $E(x\to A)$, $E(x, B)$ и $E(C\to x)$ и пусть Q_k^m, $m\geqslant 2$ орграф, который представляет собой объединение орграфа Q_k^1 и $(m-1)$-вершинного транзитивного турнира T с добавлением всех дуг, $E(V(T)\to D^{k+1})$, $E(V(T)\to A)$, $E(C\to V(T))$, где $D^{k+1}=D\bigcup\{x\}$, кроме того вершины $V(T)$ и B соединены точно одной дугой между собой. Заметим, что Q_k^m является $(4k+m)$-вершинным и все вершины из $V(T)\bigcup D^{k+1}$ имеют степень $4k+m-1$.

Обозначим через $Q(k, m)$, $k\geqslant 2$ множество орграфов, которые получаются из орграфа Q_k^m, после добавления некоторых дуг из множества $E(B, A\bigcup B\bigcup C)$ и при нумерации $H_1^1, H_1^2, \ldots, H_1^k$ блоков H_1 орграфа Q_k^m, можно добавить и дуги (c, a), где $c\in V(H_1^i)$, $a\in \in V(H_1^{i+1})$ (индексы H_1^i берутся по $\mathrm{mod}(k)$).

С помощью утверждения 1 легко заметить, что любой орграф из множества $Q(k, m)$ является k-связным.

Утверждение 2. *Для любого $k\geqslant 2$, если $G\in Q(k, m)$, то G не является гамильтоновым.*

Доказательство. Предположим, что G является гамильтоновым и пусть $x_1\to\ldots\to x_2\to\ldots\to x_i\to\ldots\to x_{k+1}\to\ldots\to x_1$, где $D^{k+1}= =\{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\}$, его гамильтоновый контур. Возьмем по направлению контура длиннейший подпуть, который начинается из вершины x_i, $1 \leqslant i \leqslant k+1$ и из множества D^{k+1} содержит только вершину x_i. Легко заметить, что каждый такой путь содержит по крайней мере одну вершину из множества B. Отсюда, так как количество таких путей равно $k+1$, то $|B| \geqslant k+1$. Это противоречит условию $|B|=k$.

Утверждение 3. *При любых $k \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$ множество $Q(k, m)$ содержит $(4k+m-1)$-регулярный орграф.*

Доказательство. Пусть $x \in Q_k^m$. Тогда

$$d(x)=\begin{cases}4k+m-1, & \text{при } x \in V(T) \cup D^{k+1}, \\ 2k+m+3, & \text{при } x \in B, \\ 3k+m, & \text{при } x \in A \cup C.\end{cases}$$

Из орграфа Q_k^m с помощью добавления новых дуг получим $(4k+m-1)$-регулярный орграф такой, чтобы полученный орграф принадлежал множеству $Q(k, m)$. Для всех i и j, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant [(k-2)/2]$ в орграфе Q_k^m добавим все дуги вида (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), где a, $c \in V(H_1^i)$ и $b \in V(H_1^{i+2j})$. Кроме того добавим все дуги вида (c, a), где $c \in V(H_1^i)$, $a \in (H_1^{i+1})$. Далее при нечетном k в каждом блоке H_1^i добавим дуги вида (b, a) (c, b). Полученный орграф является $(4k+m-1)$-регулярным и принадлежит $Q(k, m)$. (На рис. 3 и 4 изображены примеры регулярных орграфов из $Q(2, 9)$ и $Q(3, 13)$.) •

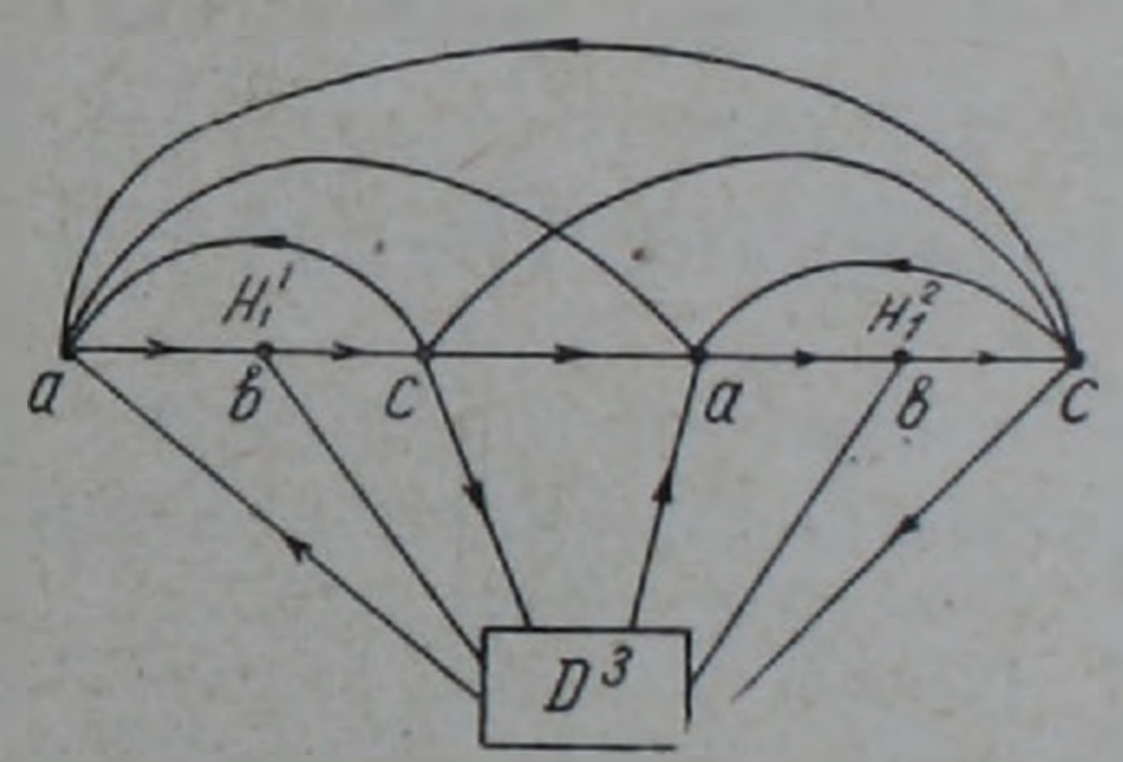

Рис. 3. 2-связный 8-регулярный негамильтоновый орграф

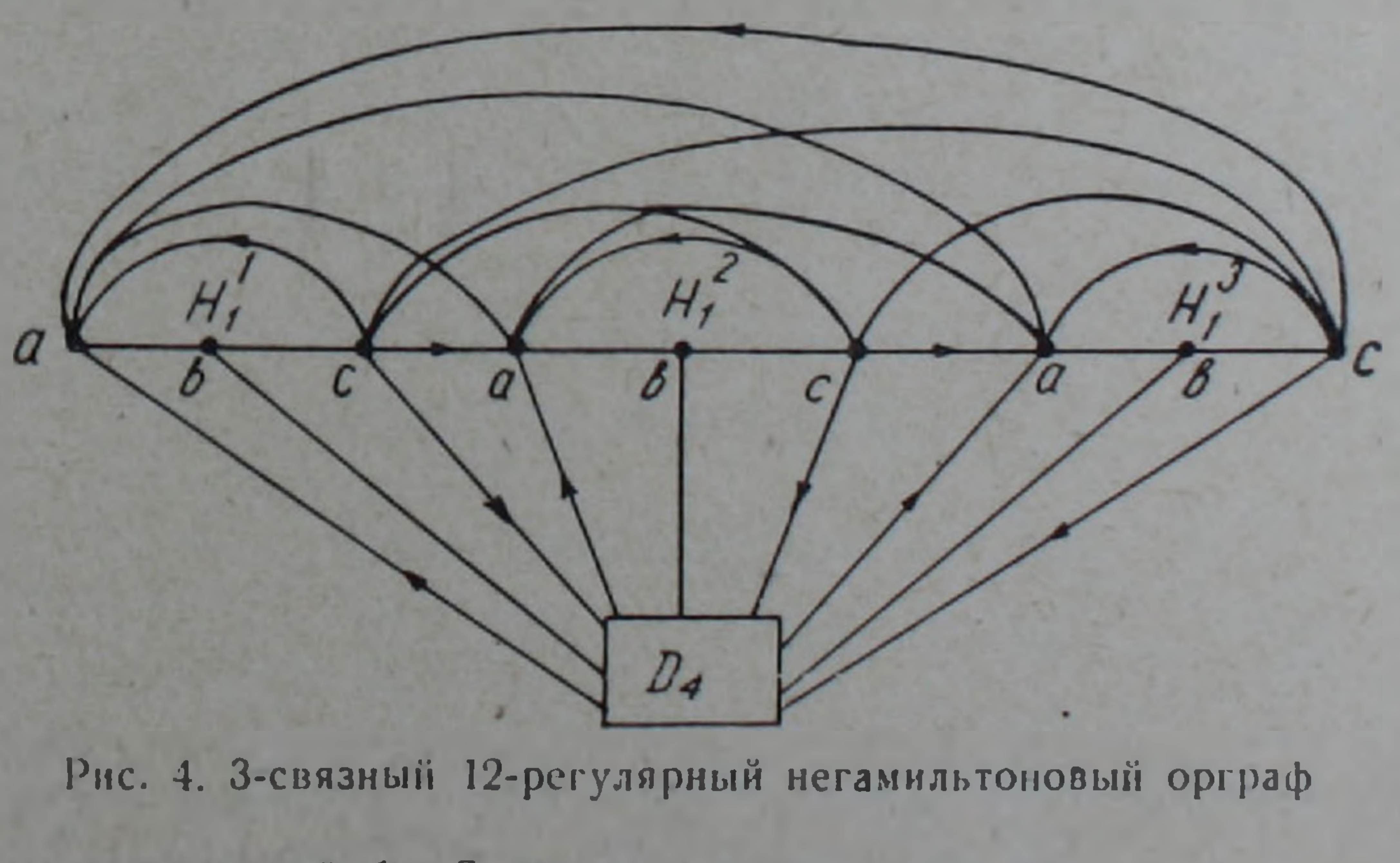

Рис. 4. 3-связный 12-регулярный негамильтоновый орграф

Из утверждений 1—3 вытекает следующая

Теорема. *Для любых $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 4k+1$ существует k-связный $(n-1)$-регулярный негамильтоновый орграф с n вершинами.*

Замечание. Если в орграфе $G \in Q(k, m)$ турнир T, все вершины типа a и типа c заменим произвольными орграфами (различные вершины можно заменять различными орграфами), то полученный орграф также будет негамильтоновым. Предполагаем, что гипотеза Томассена верна для тех орграфов, которые невозможно построить таким путем.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Թոմասենի մի հիպոթեզի հերքումը

Դիտարկվում են վերջավոր կողմնորոշված պարզ գրաֆներ։

Թոմասենը աշխատանք ([3])-ում ենթադրում է, որ ցանկացած n գագաթանի 2-կապակցված $(n-1)$-համասեռ կողմնորոշված գրաֆ, բացի D_5-ից և D_7-ից, հանդիսանում է համիլտոնյան։

Ներկա հոդվածում հերքվում է այդ ենթադրությունը և ապացուցվում է՝

Թեորեմ. Ցանկացած $k \geqslant 2$ և $n \geqslant 4k+1$ թվերի համար գոյություն ունի n գագաթանի k-կապակցված $(n-1)$-համասեռ ոչ համիլտոնյան կողմնորոշված գրաֆ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *J. A. Bondy*, Proc. 9 th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Congressus Numertantium XXI, Utilitas Math. Publ., 1978. [3] *C. Thomassen*, Proc. 7 th British Combinatorial Conf., London Math. Soc. Lecture Notes 38, Cambridge University Press, 1979. [4] *J. C. Bermond, C. T. Thomassen*, Prepr. Ser. Math. Inst. Aarhus Univ., № 10, 1980—1981.