

УДК 624.131.4395

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

Г. Ф. Рустамян

Линейная одномерная задача уплотнения газосодержащего глинистого грунта при степенном законе ползучести скелета

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. И. Тер-Степаняном 4/IV 1982)

Уравнение фильтрационного уплотнения водонасыщенного глинистого грунта с учетом сжимаемости газосодержащей воды при условии несжимаемости твердых частиц, неизменяемости коэффициента фильтрации,  $i = \text{const}$  и  $1 + e = 1 + e_{\text{ср}}$  ( $e$  — коэффициент пористости) записывается в следующем виде <sup>(1,2)</sup>:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{K_{\text{в}}} e_{\text{ср}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1 + e_{\text{ср}}}{\gamma_{\text{в}}} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где  $p$  — дополнительное давление в поровой воде;  $1/K_{\text{в}} = a_{\text{в}}$  — коэффициент сжимаемости поровой воды;  $\gamma_{\text{в}}$  — удельный вес воды.

Решение дифференциального уравнения (1) получено А. Л. Гольдиным <sup>(3)</sup> и З. Г. Тер-Мартirosяном <sup>(2)</sup>. Для выражения деформации скелета грунта во времени они, следуя В. А. Флорину, использовали линейную теорию упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова — Н. Х. Арутюняна (без учета старения материала), где мера ползучести принята в виде экспоненциальной функции <sup>(4)</sup>.

Экспериментом установлено, что кривые меры ползучести скелета глинистых грунтов при одномерном уплотнении хорошо аппроксимируются в виде <sup>(5)</sup>:

$$C(t) = A_0 \cdot t^m. \quad (2)$$

В настоящей работе сделана попытка решения линейной задачи одномерного уплотнения водонасыщенного глинистого грунта при степенном законе ползучести скелета (2).

Используя уравнение теории старения, изменяемость коэффициента пористости грунта при линейной ползучести записывают в следующем виде <sup>(5)</sup>:

$$e_0 - e = a_0 \cdot \sigma_1 + C_e(t) \cdot \sigma_1,$$

где

$$C_e(t) = C(t) \cdot (1 + e_0) = A_0 t^m (1 + e_0) = A t^m,$$

т. е.

$$e_0 - e = \sigma_1 [a_0 + C_e(t)] = \sigma_1 (a_0 + A t^m), \quad (3)$$

$a_0$  — коэффициент мгновенной сжимаемости (деформации) скелета.

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получаем:

$$-\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} (a_0 + At^m) - At^{m-1} \cdot m \sigma_1 + e_{cp} \cdot a_w \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Из уравнения равновесия имеем

$$q = \sigma_1(t) + p(t), \quad (5)$$

где  $q = \text{const}$  — величина внешнего давления;  $p(t)$  — поровое давление в воде;  $\sigma_1(t)$  — эффективное давление, передающееся на скелет грунта.

Подставляя значение  $\sigma_1(t)$  из уравнения (5) в (4), получаем неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial p}{\partial t} (a_0 + At^m + e_{cp} \cdot a_w) + A \cdot t^{m-1} \cdot m p - At^{m-1} \cdot m \cdot q = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Граничные условия во всем процессе уплотнения будут (2):

$$\left. \begin{array}{l} z=0 \\ z=h \end{array} \right\} p=0. \quad (7)$$

Начальное условие получено из условия отсутствия фильтрации в момент приложения нагрузки, когда имеет место равенство деформаций скелета и поровой жидкости (2):

$$p(0) = \frac{a_0}{a_0 + e_0 \cdot a_w} = \beta_0 \cdot q, \quad (8)$$

где  $\beta_0$  — начальный коэффициент порового давления;  $e_0$  — начальный коэффициент пористости до приложения нагрузки.

Решение уравнения (6) с начальными и граничными условиями (7) и (8) ищем в виде

$$p(z, t) = \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z. \quad (9)$$

Подставляя решение (9) в уравнение (6), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \alpha(t) \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \beta(t) \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z - \\ - \beta(t) q = c_v \sum_{n=1,3,\dots} T_n(t) \left( \frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2 \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(t) = a_0 + A \cdot t^m + e_{cp} \cdot a_w; \\ \beta(t) = A \cdot t^{m-1} \cdot m, \\ c_v = \frac{1 + e_{cp}}{\gamma_w} k, \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Разложив постоянную величину  $q$  в ряд синусов

$$q = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z$$

и подставляя это разложение в уравнение (10), получаем

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \alpha(t) \cdot \dot{T}_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \beta(t) \cdot T_n(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z - \\ - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \beta(t) \frac{4q}{\pi \cdot n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_v \left( \frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z = 0. \quad (12)$$

Из (12) получим

$$\dot{T}_n(t) + \frac{\beta(t) + c_v \left( \frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2}{\alpha(t)} T_n(t) - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \frac{4q}{\pi \cdot n} = 0. \quad (13)$$

Обозначая в (13)

$$B(t) = \frac{\beta(t) + c_v \left( \frac{\pi \cdot n}{h} \right)^2}{\alpha(t)}; \quad Q(t) = \frac{4q}{\pi \cdot n} \cdot \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}, \quad (14)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{T}_n(t) + B(t) \cdot T_n(t) - Q(t) = 0, \quad (15)$$

решение которого, как известно, записывается в следующем виде (6):

$$T_n(t) = e^{-\int B(t) dt} \left[ \int Q(t) \cdot e^{\int B(t) dt} dt + C' \right]. \quad (16)$$

Заменяя в (16) неопределенные интегралы определенными интегралами с переменным верхним пределом, получаем

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t B(u) du} \left[ \int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + C' \right], \quad (17)$$

где  $C'$  — постоянная интегрирования.

Для определения  $C'$  из уравнения (8) и (9) имеем

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z = \beta_0 \cdot q. \quad (18)$$

Разложив  $\beta_0 \cdot q$  в ряд синусов

$$\beta_0 \cdot q = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z,$$

подставляя это разложение в (18) и приравнявая соответствующие коэффициенты в правой и левой частях уравнения, находим следующее начальное условие:

$$T_n(0) = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n}. \quad (19)$$

Подставив (19) в уравнение (17), находим

$$C' = \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n}. \quad (20)$$

Следовательно

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t B(u) du} \left[ \int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n} \right], \quad (21)$$

а из (9) с учетом (21) будем иметь

$$p(z, t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} e^{-\int_0^t B(u) du} \left[ \int_0^t Q(v) \cdot e^{\int_0^v B(u) du} dv + \frac{4\beta_0 \cdot q}{\pi \cdot n} \right] \sin \frac{\pi \cdot n}{h} z, \quad (22)$$

где функции  $B(u)$  и  $Q(v)$  определяются по формулам (14).

Уравнение (22) характеризует изменение порового давления в слое грунта толщиной  $h$  во времени с учетом ползучести скелета грунта и сжимаемости жидкости.

Для определения перемещения границ уплотняемого слоя воспользуемся известной формулой осадок (7)

$$S(t) = \int_0^h \frac{e_0 - e(t, z)}{1 + e_0} dz, \quad (23)$$

где  $e_0$  — начальное значение коэффициента пористости.

Подставляя в уравнение (23) выражение  $e_0 - e$  из (3), имеем

$$S(t) = \frac{1}{1 + e_0} \int_0^h \sigma_1(t, z) (a_0 + A \cdot t^m) dz,$$

где

$$\sigma_1(t, z) = q - p(t, z).$$

Тогда для определения осадки слоя толщиной  $h$  получим

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{a_0 + At^m}{1 + e_0} \int_0^h [q - p(t, z)] dz = \\ &= \frac{a_0 + At^m}{1 + e_0} \left[ qh - \int_0^h p(t, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Автор выражает глубокую благодарность С. Р. Месчяну за помощь при выполнении настоящей работы.

Институт механики  
Академии наук Армянской ССР

Գ. Յ. ՌՈՒՍԱՄՅԱՆ

Պագ պարունակող կավային գետնահողի միաչափ խտացման  
խնդիրը կմախֆի սողֆի աստիճանային օրենքի դեպքում

Հողվածում բերված է գաղ պարունակող ջրահագեցված կավային գետնահողի միաչափ խտացման խնդիրը, որի կմախֆը ենթարկվում է աստիճան-

նային օրենքին: Հնդունված է, որ ծակոտինային ջրի շարժումը ենթարկվում է Դարսիի օրենքին, բացակայում է ճնշման սկզբնական գրադիենտը և կրճախքի սողքը գծային է:

Ստացված են ծակոտինային ջրում առաջացող հավելյալ ճնշումների և շերտի տևական նստվածքը որոշելու բանաձևերը:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> В. А. Флорин, Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953. <sup>2</sup> Н. А. Цытович и др., Прогноз скорости осадок оснований сооружений, М., Стройиздат, 1967. <sup>3</sup> А. Л. Гольдин, Труды Ленинградского инж.-экономического ин-та им. П. Тольятти, вып. 57, 1965. <sup>4</sup> Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952. <sup>5</sup> С. Р. Месчан, Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения, Недра, М., 1974. <sup>6</sup> В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, М., Наука, 1974. <sup>7</sup> Н. А. Цытович, Механика грунтов, М., Стройиздат, 1963.