

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Р. М. Киракосян, В. Н. Минасян

**К проектированию равноизгибаемых однослойных
 идеально-пластических пластинок**

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/V 1982)

В работе (1) доказано, что интеграл от квадрата толщины идеально-пластической однослойной пластинки достигает своего наименьшего значения при ее равноизгибаемости. Непосредственные вычисления показывают, что объем равноизгибаемой пластинки или совпадает с минимальным объемом соответствующей гладкой пластинки, или практически не отличается от него. Критерий равноизгибаемости не зависит от искомой толщины и внешних нагрузок пластинки, что существенно упрощает задачу. Толщина равноизгибаемой пластинки изменяется сравнительно в малом промежутке и пластинка получается более плавного профиля. Равноизгибаемость сглаживает также влияние анизотропии материала, в силу чего анизотропная пластинка в некотором смысле приближается к изотропной.

В настоящей статье в декартовых координатах приводится разрешающая система уравнений задачи проектирования равноизгибаемых однослойных пластин, изготовленных из идеально-пластического ортотропного материала. Рассматриваются гладкая и кусочно-линейная поверхности текучести. При условии текучести Треска задача сводится к известной краевой задаче для уравнения Пуассона. В качестве приложения решается задача для эллиптической пластинки.

1. Рассмотрим произвольную в плане однослойную пластинку, изготовленную из ортотропного идеально-пластического материала. Оси декартовых координат x, y, z направим по главным осям анизотропии материала. Пусть пластинка при заданных граничных условиях несет поперечную нагрузку постоянной интенсивности q . Определим толщину $2h$, обеспечивающую равноизгибаемость пластинки.

Условие текучести пластинки в пространстве моментов M_x, M_y, M_{xy} представим в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(H+G)M_x^2 + (H+F)M_y^2 - 2HM_xM_y + 2NM_{xy}^2 - h^4 \right] = 0, \quad (1.1)$$

где постоянные H, G, F, N выражаются через пределы текучести материала $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$ и τ_{sxy} (2).

Используя ассоциированный закон течения, из условия равноизгибаемости (1) и уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки получим следующую разрешающую систему:

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(2\alpha_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \left(2\alpha_2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2 \left[2\alpha_1 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} \right] \frac{\partial t}{\partial x} + \\ & + 2 \left[2\alpha_2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right] \frac{\partial t}{\partial y} + 2 \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + \right. \\ & \left. + (4 + \alpha_3) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right] t = 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\bar{w} = \frac{w}{c\sqrt{2N}}, \quad \alpha_1 = \frac{2N(H+F)}{FG+GH+HF}, \quad \alpha_2 = \frac{2N(H+G)}{FG+GH+HF}, \quad (1.4)$$

$$\alpha_3 = \frac{4NH}{FG+GH+HF}, \quad t = \frac{h^2}{2q\sqrt{2N}},$$

w — скорость прогиба пластинки, c — произвольная положительная постоянная.

Таким образом, задача проектирования равноизгибаемой пластинки с гладкой поверхностью текучести (1.1) сводится к интегрированию уравнений (1.2), (1.3) при соответствующих краевых условиях.

2. Рассмотрим шарнирно опертую по контуру эллиптическую пластинку с полуосями a и b . Уравнения (1.2), (1.3) допускают решения

$$w = \frac{c\sqrt{2N}a^2b^2}{2\sqrt{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (2.1)$$

$$h = \frac{ab}{2} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4} \right)^{1/4} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2.2)$$

$$V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1b^4 + \alpha_3a^2b^2 + \alpha_2a^4} \right)^{1/4}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2\alpha_1b^2 + \alpha_3a^2}{2\alpha_2a^2 + \alpha_3b^2}, \quad M_{xy} \equiv 0, \quad (2.3)$$

где V — объем пластинки.

В случае круглой пластинки ($a=b=R$) решение задачи имеет вид

$$w = \frac{c\sqrt{2N}}{2\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}} (R^2 - r^2), \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right)^{1/4} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (2.4)$$

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} \left(\frac{8q^2N}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right)^{1/4}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2\alpha_1 + \alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}, \quad M_{xy} \equiv 0. \quad (2.5)$$

Здесь R — радиус, r — расстояние от центра пластинки. Из (2.4) и (2.5) видно, что толщина и скорость прогиба круглой пластинки несмотря на прямолинейно-ортогональную ортоэрозию материала зависит только от радиальной координаты r . Равноизгибаемость в данном

случае настолько сглаживает влияние анизотропии, что поведение пластинки становится осесимметричным и пластинка приближается к изотропной. Однако влияние анизотропии материала полностью не исчезает. Например, в центре пластинки изгибающие моменты M_x и M_y принимают различные значения.

Решения для изотропных пластинок можно получить из (2.1)–(2.5), полагая в них

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 4, \quad N = \frac{3}{2\sigma_s^2}. \quad (2.6)$$

Для эллиптической пластинки имеем

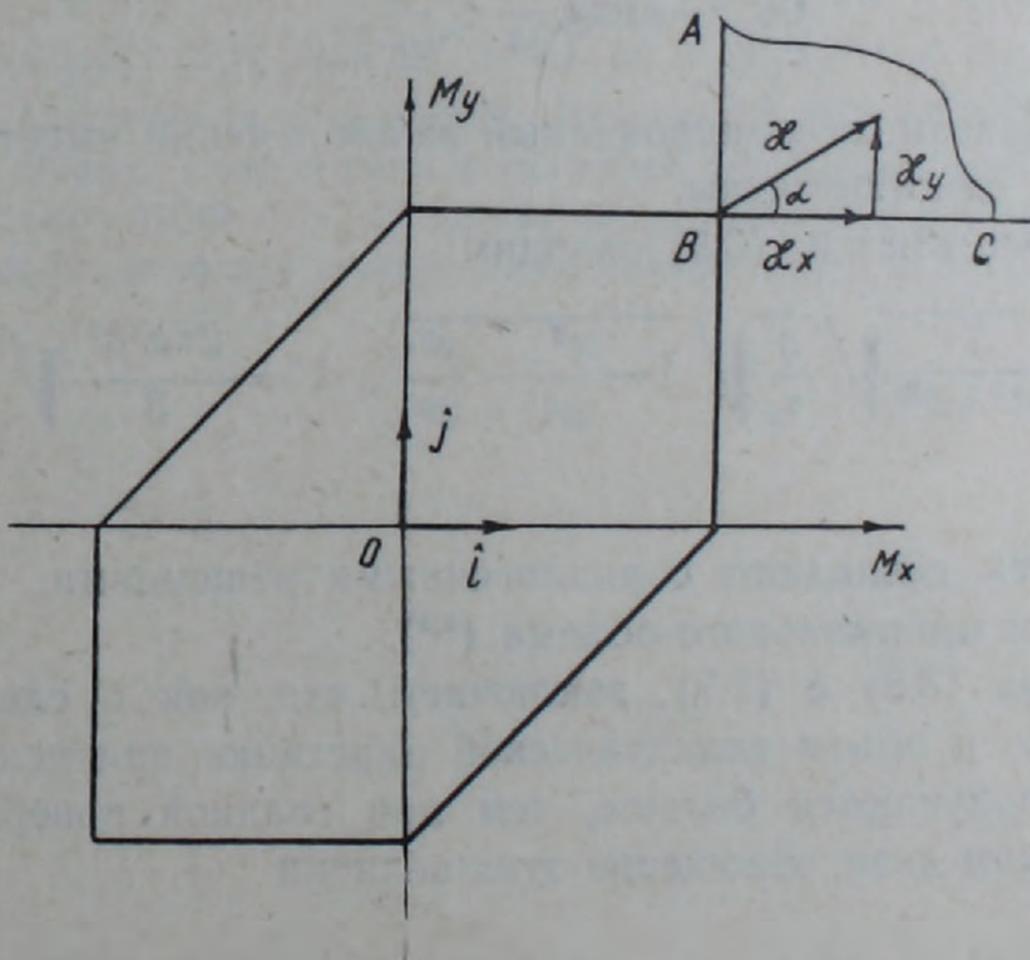
$$h = \frac{ab}{2} \left(\frac{3}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2.7)$$

$$V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3} \left(\frac{3}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}}, \quad \frac{M_x}{M_y} = \frac{2b^2 + a^2}{2a^2 + b^2}.$$

Равноизгибаемая круглая изотропная пластинка совпадает с пластинкой минимального объема (3).

3. Принимая условие текучести Треска для идеально-пластических изотропных пластинок положим (рисунок)

$$M_x = M_y = \sigma_s h^2, \quad M_{xy} = 0. \quad (3.1)$$



Условие равноизгибаемости и уравнение равновесия пластинки приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = -2, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{w} = w \frac{2\sigma_s}{c}, \quad t = h^2 \frac{2\sigma_s}{q}. \quad (3.3)$$

Таким образом, задача проектирования равноизгибаемой пластинки при условии текучести Треска и допущений (3.1) сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона. Полученные решения следует считать пригодными, если они не противоречат ассоциированному закону течения, т. е. если вектор скоростей обобщенных пластических деформаций

$$x = x_x \hat{i} + x_y \hat{j} \quad (3.4)$$

нигде не выходит из прямого угла ABC (рисунок).

Рассмотрим шарнирно опертую эллиптическую пластинку с полуосями a и b . Решения уравнений (3.2) имеют вид

$$\bar{w} \equiv t = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (3.5)$$

Так как

$$x_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{cb^2}{\sigma_s(a^2 + b^2)}, \quad x_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{ca^2}{\sigma_s(a^2 + b^2)}, \quad (3.6)$$

то вектор (3.4) во всех точках пластинки находится в прямом угле ABC , составляя с осью M_x постоянный угол

$$0 < \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a^2}{b^2} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.7)$$

Таким образом, ассоциированный закон течения имеет место и решения (3.5) действительны.

С помощью (3.5) и (3.3) находим

$$h = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3} \sqrt{\frac{q}{\sigma_s} \cdot \frac{2}{a^2 + b^2}} \quad (3.8)$$

Эти результаты совпадают с аналогичными решениями, найденными для пластинки минимального объема (4.5).

Сравнивая (3.8) с (2.7), заключаем, что, как и следовало ожидать, толщина и объем эллиптической пластинки при условии текучести Треска получаются больше, чем при гладкой поверхности текучести. На самом деле, отношение этих величин

$$\frac{h_{\text{тр.}}}{h_{\text{гл.}}} = \frac{V_{\text{тр.}}}{V_{\text{гл.}}} = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \right]^{1/4} \geq 1 \quad (3.9)$$

равняется единице лишь для круглой пластинки. Максимальная разница получается при $\frac{a}{b} \rightarrow 0$ или $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ и не превышает 8%.

Հավասարաչափ ծովող միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալերի նախագծման մասին

Միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալի հաստության քառակուսու ինտեգրալն իր ամենափոքր արժեքը ստանում է հավասարաչափ ծոման դեպքում: Անմիջական հաշվարկները ցույց են տալիս, որ հավասարաչափ ծովող սալի ծավալը կամ համընկնում է համապատասխան ողորկ սալի մինիմալ ծավալի հետ, կամ նրանից գործնականում չի տարբերվում: Հավասարաչափ ծոման հայտանիշը կախված չէ որոնվող հաստությունից և սալի վրա ազդող բեռից: Այդ հանգամանքն էապես հեշտացնում է խնդրի լուծումը: Սալի հաստությունը փոխվում է փոքր միջակայքում, որի շնորհիվ սալը ստացվում է ալելի ողորկ: Հավասարաչափ ծոմը հարթեցնում է նաև նյութի անիզոտրոպության ազդեցությունը:

Հստ հավասարաչափ ծոման հայտանիշի, միաշերտ իդեալական պլաստիկ սալերի նախագծման խնդիրը բերվում է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի նկատմամբ եզրային խնդրի: Որպես կիրառություն լուծվում է էլիպսական սալի նախագծման խնդիրը նյութի հոսունության ողորկ և կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթների համար: Քննարկվում են ստացված արդյունքները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹Р. М. Киракосян, ДАН АрмССР, т. 72, № 5 (1981). ²Н. Н. Малинин, Прикладная теория пластичности и ползучести, Машгиз, М., 1975. ³Z. Mroz, Rozpr. Inzyn., 114, 1958. ⁴В. Прагер, Проектирование пластинок наименьшего веса, Сб. переводов, Механика, № 6 (40) (1956). ⁵М. И. Эстрик, В кн.: Новые методы расчета строительных конструкций, Издательство литературы по строительству, М., 1971.