ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 1

УДК 536.21

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О плоском периодическом течении тепла в анизотропном призматическом теле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/IV 1982)

В работе [1] дано решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с неразделяющимися переменными в прямоугольной области. В настоящей статье рассматривается задача плоского периодического течения тепла в бесконечном анизотропном призматическом теле, ограниченном плоскостями $y=0$, $y=d$, $x-\omega y=0$, $x-\omega y=b$, когда имеются внутренние источники тепла, а на границе задано распределение температуры. Функция $U(x, y, t)$ распространения тепла в теле удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{c\rho}\left[\lambda_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(\lambda_{12}+\lambda_{21})\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\lambda_{22}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+w(x, y, t)\right], \tag{1}$$

а также граничным условиям и условию периодичности

$$U(x, 0, t)=S_0(x, t);\quad U(x, d, t)=S_1(x, t);\quad U(\omega y, y, t)=T_0(y, t);$$
$$U(b+\omega y, y, t)=T_1(y, t);\quad U(x, y, t+\theta)=U(x, y, t). \tag{2}$$

Здесь c—теплоемкость, ρ—плотность, $w(x, y, t)$—интенсивность источников тепла, λ_{kj}, представляющие компоненты тензора второго ранга, являются коэффициентами теплопроводности [2,3], причем $\lambda_{11}>0$, $\lambda_{22}>0$. Предполагаем при этом, что $(\lambda_{12}+\lambda_{21})^2-4\lambda_{11}\lambda_{22}<0$.

Относительно граничных функций $S_j(x, t)$ и $T_j(y, t)$ предполагаем, что они непрерывны в соответствующих областях и почти всюду обладают производной с ограниченной вариацией, а также что $S_0(0, t)=T_0(0, t)$, $S_0(b, t)=T_1(0, t)$, $S_1(\omega d, t)=T_0(d, t)$, $S_1(b+\omega d, t)=T_1(d, t)$. Что касается $w(x, y, t)$, то предполагаем, что она удовлетворяет условиям Дирихле.

Прежде чем переходить к построению решения, аффинным преобразованием координат

$$x-\omega y=\xi;\quad \beta y=\eta, \tag{3}$$

где

$$\beta=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_{11}}};\quad \lambda=\lambda_{11}-(\lambda_{12}+\lambda_{21})\omega+\lambda_{22}\omega^2, \tag{4}$$

рассматриваемую область преобразуем в прямоугольник со сторонами b и $d_1=\beta d$. В этом случае, обозначив

$$U\left(\xi+\frac{\omega\eta}{\beta}, \frac{\eta}{\beta}, t\right)=U^*(\xi, \eta, t,); \quad w\left(\xi+\frac{\omega\eta}{\beta}, \frac{\eta}{\beta}, t\right)=w^*(\xi, \eta, t);$$

$$\alpha=\frac{2\omega\lambda_{22}-\lambda_{21}-\lambda_{12}}{2\sqrt{\lambda\lambda_{22}}}, \tag{5}$$

для $U^*(\xi, \eta, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial\xi^2}-2\alpha\frac{\partial^2 U^*}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 U^*}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\lambda}w^*\right); \quad a=\frac{\lambda}{c\rho}. \tag{6}$$

Из (4) и (5) легко видеть, что $|\alpha|<1$. Граничные условия согласно (2) и (5) примут вид

$$U^*(\xi, 0, t)=S_0^*(\xi, t); \; U^*(\xi, d_1, t)=S_1^*(\xi, t); \; U^*(0, \eta, t)=T_0^*(\eta, t);$$

$$U^*(b, \eta, t)=T_1^*(\eta, t), \tag{7}$$

где

$$S_0^*(\xi, t)=S_0(\xi, t); \; S_1^*(\xi, t)=S_1(\xi+\omega d, t); \; T_0^*(\eta, t)=T_0\left(\frac{\eta}{\beta}, t\right);$$

$$T_1^*(\eta, t)=T_1\left(\frac{\eta}{\beta}, t\right).$$

Применяя к уравнению (6) конечное комплексное преобразование Фурье по времени t, для изображения функции $U^*(\xi, \eta, t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial\xi^2}-2\alpha\frac{\partial^2 U_k}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 U_k}{\partial\eta^2}-\frac{i\delta_k}{a}U_k=-\frac{1}{\lambda}w_k. \tag{8}$$

Здесь

$$U_k(\xi, \eta)=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta U^*(\xi, \eta, t)e^{-i\delta_k t}dt; \quad w_k(\xi, \eta)=$$

$$=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta w_k^*(\xi, \eta, t)e^{-i\delta_k t}dt; \quad \delta_k=\frac{2k\pi}{\theta}.$$

При этом согласно формуле обращения ([4]) переход от изображения к оригиналу осуществляется рядом

$$U^*(\xi, \eta, t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(\xi, \eta)e^{i\delta_k t}. \tag{9}$$

Далее, следуя работе ([1]), представим функцию $U_k(\xi, \eta)$ одновременно в виде двух разложений в ряд

$$U_k(\xi, \eta)=\sum_{j=1}^{\infty} f_{kj}(\xi)\sin\gamma_j\eta=\frac{g_{k0}(\xi)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} g_{kj}(\xi)\cos\gamma_j\eta, \tag{10}$$

где

$$f_{kj}(\xi)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}U_k(\xi,\eta)\sin\gamma_j\eta d\eta;\quad g_{kj}(\xi)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}U_k(\xi,\eta)\cos\gamma_j\eta d\eta;\ \gamma_j=\frac{j\pi}{d_1}. \tag{11}$$

Для определения $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$ умножим уравнение (8) поочередно на $\frac{2}{d_1}\sin\gamma_j\eta d\eta$ и $\frac{2}{d_1}\cos\gamma_j\eta d\eta$ и проинтегрируем от 0 до d_1. Принимая во внимание граничные условия (7), имеем:

$$\begin{aligned} &f''_{kj}(\xi)+2\alpha\gamma_j g'_{kj}(\xi)-\left(\gamma_j^2+\frac{i\delta_k}{a}\right)f_{kj}(\xi)=-\frac{2}{d_1}p_{kj}(\xi);\\ &g''_{kj}(\xi)-2\alpha\gamma_j f'_{kj}(\xi)-\left(\gamma_j^2+\frac{i\delta_k}{a}\right)g_{kj}(\xi)=-\frac{2}{d_1}q_{kj}(\xi). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} &p_{kj}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1}w_k(\xi,\eta)\sin\gamma_j\eta d\eta+\gamma_j[S_k^{(0)}(\xi)-(-1)^jS_k^{(1)}(\xi)];\\ &q_{kj}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1}w_k(\xi,\eta)\cos\gamma_j\eta d\eta+2\alpha[S_k^{(0)\prime}(\xi)-(-1)^jS_k^{(1)\prime}(\xi)]-S_k^{(2)}(\xi)+\\ &\qquad +(-1)^jS_k^{(3)}(\xi); \end{aligned} \tag{13}$$

$$S_k^{(0)}(\xi)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}S_0^*(\xi,t)e^{-i\delta_k t}dt;\quad S_k^{(1)}(\xi)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}S_1^*(\xi,t)e^{-i\delta_k t}dt;$$

$$S_k^{(2)}(\xi)=\left.\frac{\partial U_k}{\partial\eta}\right|_{\eta=0};\quad S_k^{(3)}(\xi)=\left.\frac{\partial U_k}{\partial\eta}\right|_{\eta=d_1}.$$

Решая уравнения (12) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям для $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$, получаем:

$$\begin{aligned} f_{kj}(\xi)&=\frac{2\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi)}{d_1\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\left\{\int_0^{d_1}T_k^{(0)}(\eta)\sin\gamma_j(\eta-\alpha\xi)d\eta+\frac{1}{\nu_{kj}}\int_0^{\xi}[p_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi-\xi_1)-\right.\\ &\left.-q_{kj}(\xi_1)\sin\alpha\gamma_j(\xi-\xi_1)]\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi_1d\xi_1\right\}+\frac{2\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi}{d_1\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\left\{\int_0^{d_1}T_k^{(1)}(\eta)\sin\gamma_j(\alpha b-\alpha\xi+\eta)d\eta+\right.\\ &\left.+\frac{1}{\nu_{kj}}\int_{\xi}^{b}[p_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi)+q_{kj}(\xi_1)\sin\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi)]\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi_1)d\xi_1\right\}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$g_{kj}(\xi)=\frac{2\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi)}{d_1\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\left\{\int_0^{d_1}T_k^{(0)}(\eta)\cos\gamma_j(\eta-\alpha\xi)d\eta+\frac{1}{\nu_{kj}}\int_0^{\xi}[p_{kj}(\xi_1)\sin\alpha\gamma_j(\xi-\xi_1)+\right.$$

$$+q_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi-\xi_1)]\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi_1 d\xi_1\Big\} + \frac{2\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi}{d_1\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\Big\{\int_0^{d_1} T_k^{(1)}(\eta)\cos\gamma_j(\alpha b-\alpha\xi+\eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{\nu_{kj}}\int_\xi^b [p_{kj}(\xi_1)\sin\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi)-q_{kj}(\xi_1)\cos\alpha\gamma_j(\xi_1-\xi)]\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi_1)d\xi_1\Big\},$$

где

$$\nu_{kj}=\left[(1-\alpha^2)\gamma_j^2+\frac{i\delta_k}{a}\right]^{\frac{1}{2}};\quad T_k^{(l)}(\eta)=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta T_l^*(\eta,t)e^{-i\delta_k t}dt\ \ (l=0;1). \quad (15)$$

Как видно из (14) и (13), в выражения для $f_{kj}(\xi)$ и $g_{kj}(\xi)$ входят неизвестные значения $S_k^{(2)}(\xi)$ и $S_k^{(3)}(\xi)$. Для их определения потребуем, чтобы вторым представлением (10) функции $U_k(\xi,\eta)$ также выполнялись граничные условия задачи на $\eta=0$ и $\eta=d_1$:

$$\frac{g_{k0}(\xi)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} g_{kj}(\xi)=S_k^{(0)}(\xi);\qquad \frac{g_{k0}(\xi)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j g_{kj}(\xi)=S_k^{(1)}(\xi). \quad (16)$$

Умножим оба уравнения (16) на $\frac{2}{b}\sin\zeta_l\xi d\xi$, где $\zeta_l=\frac{l\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b. Замечая, что ряды (16) сходятся в $(0,b)$ равномерно, вследствие чего возможна перестановка знаков суммы и интеграла, после некоторых преобразований получим

$$n_{kl}^{(\mu)}=-4\alpha\zeta_l^2\tau_{kl}\frac{\operatorname{ch}\tau_{kl}d_1-(-1)^\mu\cos\alpha\zeta_l d_1}{d_1\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^{j+\mu}]m_{kj}^{(l)}}{\left(\gamma_j^2+\zeta_l^2+\frac{i\delta_k}{a}\right)^2-4\alpha^2\gamma_j^2\zeta_l^2}+Q_{kl}^{(\mu)}.$$

(17)

Здесь введены следующие обозначения:

$$n_{kl}^{(\mu)}=2\delta_k\zeta_l\int_0^b[S_k^{(2)}(\xi)-(-1)^\mu S_k^{(3)}(\xi)]\sin\zeta_l\xi d\xi;\quad m_{kj}^{(l)}=\delta_k\gamma_j d_1[f'_{kj}(0)-(-1)^l f'_{kj}(b)];$$

$$Q_{kl}^{(\mu)}=-2\delta_k\tau_{kl}\frac{\operatorname{ch}\tau_{kl}d_1-(-1)^\mu\cos\alpha\zeta_l d_1}{\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1}\Bigg[\frac{1}{\theta(a\zeta_l^2+i\delta_k)}\int_0^\theta e^{-i\delta_k t}\frac{\partial}{\partial t}(S_0^*(0,t)-$$

$$-(-1)^l S_0^*(b,t)+(-1)^\mu S_1^*(0,t)-(-1)^{\mu+l}S_1^*(b,t))dt+\int_0^b(S_k^{(0)\prime}(\xi)+(-1)^\mu\times$$

$$\times S_k^{(1)\prime}(\xi))\cos\alpha\zeta_l\xi d\xi\Bigg]+\frac{2\delta_k\zeta_l}{\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1}\Bigg\{\frac{a}{a\zeta_l^2+i\delta_k}\int_0^{d_1}[T_k^{(0)\prime}(\eta)-(-1)^l T_k^{(1)\prime}(\eta)]\Bigg[\alpha\left(\zeta_l^2+\frac{2i\delta_k}{a}\right)\times$$

$$\times(\sin\alpha\zeta_l\eta\operatorname{sh}\tau_{kl}(d_1-\eta)-(-1)^\mu\sin\alpha\zeta_l(d_1-\eta)\operatorname{sh}\tau_{kl}\eta)+\tau_{kl}\zeta_l(\cos\alpha\zeta_l\eta\operatorname{ch}\tau_{kl}(d_1-\eta)-$$

$$-(-1)^\mu\cos\alpha\zeta_l(d_1-\eta)\operatorname{ch}\tau_{kl}\eta)\Bigg]d\eta+\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^{d_1}w_k(\xi,\eta)[\sin\zeta_l(\alpha\eta+\xi)\operatorname{sh}\tau_{kl}(d_1-\eta)-$$

$$-(-1)^{\mu}\sin\zeta_l(\alpha d_1-\alpha\eta-\xi)\operatorname{sh}\tau_{kl}\eta]\,d\eta d\xi+\Big(\alpha\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1+ \tag{18}$$

$$+(-1)^{\mu}\frac{\tau_{kl}}{\zeta_l}\sin\alpha\zeta_l d_1\Big)\int_0^b[S_k^{(0)'}(\xi)-(-1)^{\mu}S_k^{(1)'}(\xi)]\sin\zeta_l\xi d\xi\Big\};\ \tau_{kl}=\left[(1-\alpha^2)\zeta_l^2+\frac{i\delta_k}{a}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В свою очередь, $m_{kj}^{(0)}$ и $m_{kj}^{(1)}$ согласно (18) и (14) определятся из следующих соотношений:

$$m_{kj}^{(l)}=-4\alpha\gamma_j^2\nu_{kj}\frac{\operatorname{ch}\nu_{kj}b-(-1)^l\cos\alpha\gamma_j b}{b\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{[1+(-1)^{l+\mu}]n_{k\mu}^{(j)}}{\left(\zeta_\mu^2+\gamma_j^2+\dfrac{i\delta_k}{a}\right)^2-4\alpha^2\gamma_j^2\zeta_\mu^2}+P_{kj}^{(l)}, \tag{19}$$

где $$P_{kj}^{(l)}=-2\delta_k\nu_{kj}\frac{\operatorname{ch}\nu_{kj}b-(-1)^l\cos\alpha\gamma_j b}{\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\Big[\frac{1}{\theta(a\gamma_j^2+i\delta_k)}\int_0^{\theta}e^{-i\delta_k t}\frac{\partial}{\partial t}(S_0^*(0,t)-$$

$$-(-1)^l S_1^*(0,t)+(-1)^l S_0^*(b,t)-(-1)^{j+l}S_1^*(b,t))dt+$$

$$+\int_0^{d_1}(T_k^{(0)'}(\eta)+(-1)^l T_k^{(1)'}(\eta))\cos\gamma_j\eta d\eta\Big]+$$

$$+\frac{2\gamma_j\delta_k}{\operatorname{sh}\nu_{kj}b}\Big\{\frac{a}{a\gamma_j^2+i\delta_k}\int_0^b[S_k^{(0)'}(\xi)-(-1)^l S_k^{(1)'}(\xi)]\Big[\alpha\Big(\gamma_j^2+\frac{2i\delta_k}{a}\Big)(\sin\alpha\gamma_j\xi\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi)-$$

$$-(-1)^l\sin\alpha\gamma_j(b-\xi)\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi)+\gamma_j\nu_{kj}(\cos\alpha\gamma_j\xi\operatorname{ch}\nu_{kj}(b-\xi)-(-1)^l\cos\alpha\gamma_j(b-$$

$$-\xi)\operatorname{ch}\nu_{kj}\xi)\Big]d\xi+\Big(\alpha\operatorname{sh}\nu_{kj}b+(-1)^l\frac{\nu_{kj}}{\gamma_j}\sin\alpha\gamma_j b\Big)\int_0^{d_1}[T_k^{(0)'}(\eta)-(-1)^l T_k^{(1)'}(\eta)]\sin\gamma_j\eta d\eta+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^{d_1}w_k(\xi,\eta)[\sin\gamma_j(\alpha\xi+\eta)\operatorname{sh}\nu_{kj}(b-\xi)-(-1)^l\sin\gamma_j(\alpha b-\alpha\xi-\eta)\operatorname{sh}\nu_{kj}\xi]d\eta d\xi\Big\}. \tag{20}$$

Таким образом, для определения неизвестных постоянных $n_{kl}^{(\mu)}$ и $m_{kj}^{(l)}$ получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (17) и (19). Для исследования этих систем оценим предварительно сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений. Рассмотрим, например, сумму модулей коэффициентов в kl-ом уравнении системы (17):

$$\sigma_{kl}^{(\mu)}=4|\alpha||\tau_{kl}|\zeta_l^2\frac{|\operatorname{ch}\tau_{kl}d_1-(-1)^{\mu}\cos\alpha\zeta_l d_1|}{d_1|\operatorname{sh}\tau_{kl}d_1|}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{j+\mu}}{\left|\left(\gamma_j^2+\zeta_l^2+\dfrac{i\delta_k}{a}\right)^2-4\alpha^2\gamma_j^2\zeta_l^2\right|}. \tag{21}$$

Производя оценку суммы (21), получим, что

$$\text{при } \zeta_l^4 < \frac{\delta_k^2}{a^2} \quad \sigma_{kl}^{(\mu)} < |\alpha| < 1, \text{ а при } \zeta_l^4 \geqslant \frac{\delta_k^2}{a^2} \quad \sigma_{kl}^{(\mu)} < \frac{|\alpha| a \zeta_l^2}{\sqrt{a^2 \zeta_l^4 + \delta_k^2}}.$$

Аналогичную оценку получаем и для системы (19). Таким образом, системы (17) и (19) вполне регулярны. Свободные члены $Q_{kl}^{(\mu)}$ и $P_{kj}^{(l)}$ согласно предположениям относительно функций $S_j(x, t)$, $T_j(y, t)$ и $w(x, y, t)$ ограничены в своей совокупности, и из теории бесконечных систем ([5]) следуют существование и единственность ограниченного решения полученных систем и сходимость метода последовательных приближений.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ պարբերական հոսքի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է զուգահեռագծային լայնական հատվածքով անվերջ անիզոտրոպ պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ պարբերական հոսքի խնդիրը, երբ մարմնում գործում են պարբերաբար փոփոխվող ջերմության աղբյուրներ, իսկ եզրում տրված է ջերմության բաշխումը։

Աֆֆին ձևափոխության միջոցով հատվածքի եզրագիծը վերածվում է ուղղանկյան, որից հետո կիրառվում է Ֆուրյեի վերջավոր կոմպլեքս ձևափոխությունը, ապա հետևելով ([1]) հոդվածի, լուծումը որոնվում է շարքի միաժամանակ երկու տեսակ վերածման միջոցով, որոնց գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմներից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. С. Минасян,* ДАН АрмССР, т. 23, № 4 (1956). [2] *Г. Карслоу, Д. Егер,* Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. [3] *Дж. Най,* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц, Мир, М., 1967. [4] *К. Дж. Трантер,* Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, М., 1956. [5] *Л. В. Канторович, В. И.* Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962.