ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 1

УДК 517.535.4

МАТЕМАТИКА

Т. В. Тарарыкова

Абстрактные интерференционные теоремы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 8/V 1982)

В настоящей статье рассматриваются вопросы, посвященные явлению интерференции, впервые обнаруженному С. Н. Бернштейном ([1]) и в дальнейшем изучавшемуся рядом авторов (см., например, ([2–5])) для операторов, действующих в банаховых пространствах.

Пусть X—банахово пространство. $A_j: X \to X$—линейные ограниченные операторы ($j=1, \ldots, n$), причем $A_k A_l = A_l A_k$ ($k, l = 1, \ldots, n$); $T_j(t) e^{iA_j t}$ $(t \in R)$—группы операторов, порождаемые операторами A_j. Положим $\alpha_j(t) = \sup\limits_{|h| \leqslant |t|} \|T_j(h)\|$ ($t \in R$, $j=1, \ldots, n$). При каждом $j=1, \ldots, n$ функция $\alpha_j(t)$ непрерывна на R, четна, монотонно возрастает при $t \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим условиям: $1 \leqslant \alpha_j(t) \leqslant e^{\|A_j\||t|}$, $\alpha_j(t_1 + t_2) \leqslant \alpha_j(t_1)\alpha_j(t_2)$. Обозначим через M_α класс борелевских мер μ на R^n таких, что $\|\mu\|_\alpha = \int\limits_{R^n} \alpha(s)|\mu(ds)| < \infty$, где $\alpha(s) = \alpha_1(s_1) \ldots \alpha_n(s_n)$. Полагая $T(s) = \prod\limits_{j=1}^{n} T_j(s_j) = e^{i(A_1 s_1 + \ldots + A_n s_n)}$, определим свертку $\mu * x$ для $\mu \in M_\alpha$, $x \in X: \mu * X = \int\limits_{R^n} T(-s) x \mu(ds)$.

Ниже рассматривается преобразование Фурье $\hat{\mu}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \times \int\limits_{R^n} e^{-i\lambda t} \mu(dt)$ меры $\mu \in M_\alpha$ и ряд Фурье функции $(2\pi)^{n/2} e^{i\lambda t} \hat{\mu}(\lambda) \sim \sim \sum\limits_{k \in Z^n} a_k(t) e^{i\lambda k}$ $t \in R^n$, $\lambda \in Q$, где $Q = \{\lambda \in R^n, |\lambda_j| < \pi, j=1, \ldots, n\}$, $a_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{Q} \hat{\mu}(\lambda) e^{i\lambda(t-k)} d\lambda$. Предположим, что $\{a_k\} \in l_\alpha : \sum\limits_{k \in Z^n} |a_k(t)| \alpha(k) < \infty$ при $t \in R^n$, следовательно,

$$(2\pi)^{n/2} e^{i\lambda t} \hat{\mu}(\lambda) = \sum_{k \in Z^n} a_k(t) e^{i\lambda k}, \ \lambda \in \overline{Q} = \{\lambda \in R^n, \ |\lambda_j| \leqslant \pi, \ j=1, \ldots, n\}.$$

Теорема 1. *Пусть спектральные радиусы операторов* A_j $r(A_j) < \pi$ *Тогда, если* $\alpha(t) \leqslant \sum C \prod\limits_{j=1}^{n} (1 + |t_j|)^M$ *для некоторых* $C > 0$ *и* $M \geqslant 0$, *то*

1) *для любой функции* $\eta(\lambda)\in C_0^\infty(Q)$, $\eta(\lambda)=1$ на $Q_1=\{\lambda\in R^n, |\lambda_j|<r(A_j), j=1,\ldots,n\}$

$$T(t)x=\sum_{k\in Z^n}c_k(t)T(k)x, \quad t\in R^n, \tag{1}$$

где $c_k(t)$ — *коэффициенты Фурье функции* $(2\pi)^{n/2}e^{i\lambda t}\eta(\lambda)$;

2) *для любого* $0<\varepsilon<1$ *существуют такие функции* $b_k(t)=b_{k\varepsilon}(t)$ $(k\in Z^n, t\in R^n)$, *что* $|b_k(t)|\leqslant c(t)e^{-|k|^\varepsilon}$, *где* $c(t)$ *не зависит от* k *и* $T(t)x=\sum\limits_{k\in Z^n}b_k(t)T(k)x$;

3) *если* $\mu\in M_\alpha$, $\{a_k\}\in l_\alpha$, *то*

$$T(t)\mu*x=\sum_{k\in Z^n}a_k(t)T(k)x, \quad (t\in R^n). \tag{2}$$

В частности, если μ *есть мера Дирака, сосредоточенная в нуле, то*

$$T(t)x=\sum_{k\in Z^n}\frac{\sin\pi(t_1-k_1)\ldots\sin\pi(t_n-k_n)}{\pi(t_1-k_1)\ldots\pi(t_n-k_n)}T(k)x.$$

Будем говорить, что $\alpha\in F$, если $\alpha_j(u)\leqslant e^{\sigma_j(u)}$ $(j=1,\ldots,n)$, $u\in R$, где функции $\sigma_j(u)$ непрерывны, четны, выпуклы, монотонно возрастают при $u\geqslant 0$ и $\int\limits_0^\infty\frac{\sigma(u)}{1+u^2}du<\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $r(A_j)\leqslant\pi$ $(j=1,\ldots,n)$. *Если* $\alpha\in F$, $\mu\in M_\alpha$, $\{a_k\}\in l_\alpha$, *то справедливо равенство* (2).

Теорема 3. *Пусть* $\pi<r(A_j)<2\pi$ $(j=1,\ldots,n)$. *Тогда*

1) *если* $\alpha\in F$, $\{a_k\}\in l_\alpha$, $\mu\in M_\alpha$ $\hat\mu(\lambda)=0$ *при* $\lambda\in\overline{Q}_1\setminus Q_2$, *где* $Q_1=\{\lambda\in R^n, |\lambda_j|<r(A_j), j=1,\ldots,n\}$, $Q_2=\{\lambda\in R^n, |\lambda_j|<2\pi-r(A_j), j=1,\ldots,n\}$, *то справедливо равенство* (2);

2) *если* $\mu\in M_\alpha$, $\{a_k\}\in l_\alpha$, $\hat\mu(\lambda)=0$ *в некоторой окрестности множества* $\overline{Q}_1\setminus Q_2$, *то справедливо равенство* (2).

Замечание. Если $r(A_j)>2\pi$ $(j=1,\ldots,n)$, то в предложениях теоремы 3 равенство (2) принимает вид $T(t)\mu*x=0$.

Пусть теперь $\Lambda(t)\in X^*$ $(t\in R^n)$ — линейный непрерывный функционал, удовлетворяющий условию $\Lambda(0)(T(t)x)=\Lambda(t)(T(0)x)$. Применяя функционал к равенству (1), учитывая его непрерывность, получим, что

$$\Lambda(t)x=\Lambda(0)T(t)x=\Lambda(0)(\sum_{k\in Z^n}c_k(t)T(k)x)=\sum_{k\in Z^n}c_k(t)\Lambda(k)x.$$

Аналогично, можно применять $\Lambda(0)$ и к равенству (2).

Таким образом, справедливо следующее

Следствие. *В предположениях теорем 1—3 выполняются равенства:*

$$\Lambda(t)x=\sum_{k\in Z^n}c_k(t)\Lambda(k)x; \tag{1'}$$

$$\Lambda(t)\mu*x=\sum_{k\in Z^n}a_k(t)\Lambda(k)x. \tag{2'}$$

Ниже рассматривается вопрос о справедливости неравенств:

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q,\gamma(R^n)}} \leqslant K\|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}; \tag{3}$$

$$\|\Lambda(t)\mu * x\|_{L_{q,\gamma(R^n)}} \leqslant K\|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}, \tag{4}$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $\gamma(t)$—непрерывная положительная в R^n функция, $\beta(k) = (\{\beta_k\}_{k\in Z^n},\ \beta_k > 0)$.

Если $K = \inf\limits_{\substack{\eta\in C_0^\infty(Q) \\ \eta=1 \text{ на } Q_1}} \|C\|_{l_p \to L_q} < \infty$, где C—оператор, определенный равенством $C(\{g_k\})(t) = \sum\limits_{k\in Z^n} \frac{c_k(t)\gamma(t)}{\beta_k} g_k$, $c_k(t)$—коэффициенты Фурье функции $(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{i\lambda t}\eta(\lambda)$,

$$\|C\|_{l_p\to L_q} = \sup_{\{g_k\}\neq 0} \frac{\left\| \sum\limits_{k\in Z^n} \frac{c_k(t)\gamma(t)}{\beta_k} g_k \right\|_{L_q(R^n)}}{\|g_k\|_{l_p}},$$

то справедлива

Теорема 4. *Пусть* $r(A_j) < \pi$ $(j=1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q,\gamma(R^n)}} \leqslant K\|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}.$$

Следствие. *Пусть* $r(A_j) < \pi$ $(j=1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\sup_{t\in R^n} |\Lambda(t)x| \leqslant \left(\prod_{j=1}^n \frac{r(A_j)}{\pi}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \left(\sum_{k\in Z^n} |\Lambda(k)x|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

причем константа $\left(\prod\limits_{j=1}^n \frac{r(A_j)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ *—точная.*

Теорема 5. *В предположениях пункта* 3 *теоремы* 1, *теоремы* 2 *и пунктов* 1, 2 *теоремы* 3 *имеем*

$$\|\Lambda(t)\mu * x\|_{L_{q,\gamma(R^n)}} \leqslant \|C\|_{l_p\to L_b} \|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}}.$$

Следствие.

$$\sup_{t\in R^n} |\Lambda(t)\mu * x| \leqslant \|\hat{\mu}\|_{L_2(Q)} \left(\sum_{k\in Z^n} |\Lambda(k)x|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Воронежский государственный университет

Տ. Վ. ՏԱՐԱՐԻԿՈՎԱ

Աբստրակտ ինտերֆերենցիոն թեորեմներ

Ստացված են Մ. Կարտրայտի և Ս. Ն. Բեռնշտեյնի վերջավոր աստիճանի ամբողջ ֆունկցիաների մասին թեորեմների աբստրակտ անալոգները և ընդհանրացումները։

Թող X-*ը լինի բանախի տարածություն և* $A_j: X \to X$ $(j=1, \ldots, n)$ *զույգ առ զույգ տեղափոխելի սահմանափակ օպերատորներ։ Նշանակենք*

$$T_j(s_j) = e^{iA_j s_j} (s_j \in R), \quad T(s) = \prod_{j=1}^n T_j(s_j) \qquad (s\in R^n),$$

$$\mu*x=\int\limits_{R^n} T(-s)x\mu(ds),\ \alpha_j(s)=\sup_{|h|\leqslant|s|}\|T_i(h)\|,\ \alpha(s)=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j(s_j),$$

որտեղ՝ μ-ն R^n-ում այնպիսի բորելյան չափ է, որ՝

$$\|\mu\|_\alpha=\int\limits_{R^n}\alpha(s)|\mu(ds)|<\infty:$$

Ստացված են $T(t)x=\sum\limits_{k\in Z^n}c_k(t)T(k)x$, *երբ* $r(A_j)<\pi$ *և* $T(t)\mu*x=\sum\limits_{k\in Z^n}c_k(t)T(k)x$, *երբ* $r(A_j)\leqslant\pi$ *ներկայացումները, ինչպես նաև μ-ի վրա համապատասխան ենթադրությունների դեպքում ներկայացումներ, երբ* $\pi<r(A_j)\leqslant 2\pi$: *Ելնելով այդ ներկայացումներից ստացված են հետևյալ տիպի գնահատականներ*

$$\|\Lambda(t)x\|_{L_{q_\gamma}(R^n)}\leqslant B_{p,q}\|\Lambda(k)\|_{l_{p,\beta}};\quad \|\Lambda(t)\mu*x\|_{L_{q,\gamma}(R^n)}\leqslant B_{p,q}\|\Lambda(k)x\|_{l_{p,\beta}},$$

երբ $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, *որտեղ՝* $\Lambda(t)$*-ն* $\Lambda(t)x=\Lambda(0)T(t)x=T(t)\Lambda(0)x$ *պայմանին բավարարող ֆունկցիոնալ է։ p-ի և q-ի որոշ արժեքների համար* $B_{p,q}$ *հաստատունը ճշգրիտ է։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Н. Бернштейн*, Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени. Соч., т. 2, 1949. [2] *Н. И. Ахиезер*, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., 1965. [3] *Б. Я. Левин, Динь Тхань Хоа*, Функц. анализ и его прилож., т. 3, вып. 1 (1969). [4] *R. P. Boas*, Michigan Math. Journal, 3, 123—132, 1955—1956. [5] *А. Ф. Тиман*, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.