

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в $\mathbb{C}^n$

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 7/V 1982)

Основным результатом настоящей работы является следующая
Теорема 1. Пусть функция $f=f(z, w)$ $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $n \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$, голоморфна в единичном шаре $\{(z, w) : |z|^2 + |w|^2 < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ и для любого $\lambda \in \mathbb{C}^{n-1}$, $|\lambda| < r$ ($r > 0$) функция $f(\lambda w, w)$ голоморфна всюду в $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$, за исключением одной точки (зависящей от λ).

Тогда f продолжается до функции $\bar{f}$, голоморфной в $\mathbb{C}^n \setminus \{l(z, w) = 0\}$, где l — некоторая линейная функция.

Если $f(\lambda w, w)$ вообще не имеет особенностей или мероморфна, то утверждение теоремы 1 является очевидным следствием стандартных теорем об оболочках голоморфности и мероморфности (см. ^(1,2)),

Для доказательства теоремы 1 кроме известных результатов Е. М. Чирки ⁽³⁾ о разложении функции, голоморфной вне аналитических множеств, в ряды Лорана—Якоби нам нужно одно обобщение классической теоремы Леви об аналитичности множества особых точек (см. ⁽⁴⁾).

Пусть $D \subset \mathbb{C}_z^{n-1}$, $G \subset \mathbb{C}_w$ — произвольные области и функция $f=f(z, w)$ голоморфна по совокупности переменных в области $(D \times G) \setminus E$, где $E \subset D \times G$ — замкнутое множество, сечение которого любой комплексной прямой $z = z_0$, $z_0 \in D$, состоит из одной точки, которую мы обозначим через $(z_0, \varphi(z_0))$. Теорема Леви утверждает, что E — аналитическое множество в $D \times G$, т. е. φ — голоморфная функция в области D .

Задача существенно усложняется в случае частичной голоморфности только по w , без дополнительного предположения о замкнутости множества особенностей E . В этой ситуации справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}_z^{n-1}$ — произвольная область и функция $f=f(z, w)$; $z \in D$, $w \in \mathbb{C}$ голоморфна по совокупности переменных в $D \times \{|w| < 1\}$. Предположим, что при любом фиксированном $z \in D$ функция $f(z, w)$ голоморфно продолжается во всю плоскость $\mathbb{C}_w$, за исключением одной точки $\varphi(z)$. Тогда φ — голоморфная функция в области D , т. е. множество особенностей $E = \{(z, w); z \in D, w = \varphi(z)\}$ является аналитическим.

Если множество E замкнуто, то утверждение теоремы 2 сразу

следует из теоремы Леви, ибо тогда функция f , как хорошо известно, голоморфна в $(D \times \mathbb{C}_w) \setminus E$.

Доказательство обеих теорем существенно упрощается, когда функция $f(\cdot, w)$ имеет единственную особенность в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ (в общем случае мы считаем, что в бесконечности тоже может быть особенность). Простые доказательства в этом случае приводятся ниже.

Для доказательства теоремы 2 в указанном выше частном случае заметим, что по фундаментальной теореме Гартогса достаточно доказать голоморфность $\varphi(z)$; $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$ по каждому переменному z_k , $k = 1, \dots, n-1$, при фиксированных остальных; значит, можно считать $n=2$. По условию, для любого фиксированного $z \in D$ функция $f(z, w)$ голоморфна в единичном круге $\{|w| < 1\}$ и ее ряд Тейлора в точке $w=0$ сходится в большом круге $\{|w| < |\varphi(z)|\}$. Тогда, как известно, ряд $f(z, w) = \sum a_n(z)w^n$ сходится в области $\{(z, w) : z \in D, |w| < |\varphi(z)|_*\}$; аналогично ряд $f(z, w) = \sum b_n(z)/w^n$ сходится в области $\{(z, w) : z \in D, |w| > |\varphi(z)|^*\}$. Здесь $|\varphi(z)|_*$ и $|\varphi(z)|^*$ — соответственно нижняя и верхняя регуляризации функции $|\varphi(z)|$. Хорошо известно (см. (1.4)), что функция $-\ln|\varphi(z)|^*$ супергармонична, а $-\ln|\varphi(z)|_*$ — субгармонична в D . Отсюда с помощью стандартных усреднений легко выводится, что $\ln|\varphi(z)|$ — гармоническая функция в области D . Нам достаточно того, что $|\varphi(z)|$ — непрерывная функция. Точно так же доказывается непрерывность функции $|\varphi(z) - a|$, где a — произвольная точка с $|a| < 1$. Из непрерывности $|\varphi(z) - a|$ для этих a , очевидно, следует непрерывность самой функции $\varphi(z)$, после чего наше утверждение следует из теоремы Леви.

Для доказательства частного случая теоремы 1 сделаем замену переменных $z_1 = z/w$; $z_2 = 1/w$ и положим $g(z_1, z_2) = f(z_1/z_2, 1/z_2)$. Тогда $g(z_1, z_2)$ голоморфна в области $\{|z_2| > \sqrt{1+|z_1|^2}\}$ и для любого фиксированного z_1 ; $|z_1| < r$, функция $g(z_1, z_2)$ голоморфна в $\bar{\mathbb{C}}_{z_2} \setminus \varphi(z_1)$. Как мы уже доказали, φ — голоморфная функция. Пусть $\varphi(z_1) = l(z_1) + z_1^2 \varphi_1(z_1)$, где $l(z_1) = az_1 + b$ — линейная часть функции $\varphi(z_1)$ в нуле, и $\varphi_1(z_1)$ — голоморфная функция, равномерно ограниченная в круге $|z_1| \leq r/2$. При $|z_1| < \varepsilon$ имеем $|\varphi(z_1) - l(z_1)| < C\varepsilon^2$, т. е. над $|z_1| < \varepsilon$ функция $g(z_1, z_2)$ голоморфна вне трубочки $|z_2 - l(z_1)| < C\varepsilon^2$. Сделаем еще одно преобразование $z' = z_1$, $w' = 1/(z_2 - l(z_1))$ и положим $h(z', w') = g\left(z', \frac{1}{w'} + l(z')\right)$. Тогда функция h голоморфна в $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < c'\}$ для некоторого $c' > 0$ и при каждом фиксированном z' , $|z'| < \varepsilon$ она голоморфна по w' в круге $|w'| < 1/C\varepsilon^2$. По лемме Гартогса, h голоморфна в поликруге $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < 1/C\varepsilon^2\}$. Кроме того, h голоморфна в области $\{|w'| < 1/c\sqrt{1+|z'|^2}\}$ для некоторого $c > 0$, зависящего от коэффициентов функции l , так как g голоморфна в $\{|z_2| > \sqrt{1+|z_1|^2}\}$ и по z_2 голоморфна в ∞ .

Таким образом, h голоморфна в объединении поликругов $\{|z'| < \varepsilon, |w'| < 1/C\varepsilon^2\}$ и $\{|z'| < 1/\varepsilon, |w'| < \varepsilon/2c\}$. Оболочка голоморфности этого объединения содержит поликруг $\{|z'| < \varepsilon^{-3/5}, |w'| < \varepsilon^{-2/5}\}$. Так как $\varepsilon > 0$

произвольное, то функция h голоморфно продолжается на все $\mathbb{C}^2$. Возвращаясь к переменным (z, w) , получаем, что f голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^2 \setminus \{(z, w) : az + bw = 1\}$.

В общем случае приведем только схему доказательства теоремы 2. Сделаем преобразование $(z, w) \rightarrow (z, 1/w)$ и будем разлагать полученную функцию $g(z, w) = f(z, 1/w)$ в ряды Тейлора по $(w - a)$, $|a| > 1$. Радиусы сходимости (при различных z) равны либо $|a|$, либо $|a - \varphi(z)|$. Нижняя регуляризация по z радиуса сходимости по w в каждой точке z не больше, чем сам радиус, причем отличаются они только на множестве емкости нуль. Используя это свойство и произвольность центра разложения a , нетрудно показать, что $\arg \varphi(z)$ является непрерывной функцией. Рассматривая вместо преобразования $w \rightarrow 1/w$ другие дробно-линейные преобразования $\mathbb{C}_w$ и повторяя приведенное рассуждение, мы получим, что функция $\varphi(z)$ непрерывна, после чего утверждение теоремы опять следует из теоремы Леви.

Доказательство теоремы 1 в общем случае. По теореме 2, функция φ голоморфно зависит от параметра λ , поэтому в достаточно узком конусе $|z| < r|w|$ особенности функции $f(z, w)$ лежат на множестве $w = \psi(z)$, где ψ — голоморфная функция в малой окрестности точки 0 в $\mathbb{C}_z^{n-1}$. Пусть $p(z)$ — многочлен Тейлора второй степени для функции ψ в нуле. $\psi(z) = p(z) + z^3 \psi_1(z)$, где ψ_1 — тоже голоморфна в окрестности $z = 0$. Сделаем биголоморфное преобразование координат $(z, w) \rightarrow (z, w - p(z) + \psi(0))$ (а функцию будем по-прежнему обозначать через $f(z, w)$). Тогда при каждом фиксированном z особенность f будет в точке $(z, h(z))$, где $h(z) = \alpha + \psi(z) + p(z)$, $\alpha = \psi(0)$ и $|h(z) - \alpha| < C|z|^3$ в некоторой окрестности $z = 0$. Сделав еще одно преобразование $(z, w) \rightarrow (z/w, 1/w)$, мы получаем, что достаточно разобрать случай, когда функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $U = \{(z, w) : |w| > \sqrt{1 + |z|^2}\}$ и для любого фиксированного z , $|z| < r$, функция $f(z, w)$ голоморфна в $\mathbb{C}_w \setminus \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ голоморфна в $|z| < r$ и

$$|\varphi(z) - \alpha| < C|z|^3, \quad (1)$$

где $\alpha = \varphi(0)$ и C — абсолютная константа.

Положим $g(w) = w(w - \alpha)$ и заметим, что вне круга $\{|w| \leq 1 + |z|\}$ для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ функцию f можно разлагать в ряд Лорана — Якоби по степеням полинома $g(w)$:

$$f(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z, w) / g^n(w), \quad (2)$$

коэффициенты которого

$$a_n(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1+|z|} f(z, \eta) g^{n-1}(\eta) \frac{g(\eta) - g(w)}{\eta - w} d\eta \quad (3)$$

являются, очевидно, голоморфными функциями во всем пространстве (см. (3)).

Оценим $|a_n(z, w)|$ с учетом того, что $|f| < C_2$ и

$$|g(w)| < C_1(1+|w|)^2 \text{ и } \frac{g(\eta) - g(w)}{\eta - w} = \eta + w - \alpha$$

в области U .

Из (3) следует, что

$$|a_n(z, w)| \leq C_3(1+|z|)^{2n}(1+|w|). \quad (4)$$

Следовательно, по теореме Лиувилля, $a_n(z, w)$ является многочленом степени $\leq 2n$ по z и степени ≤ 1 по w . Уточним теперь оценку (4) при $|z| < \varepsilon$. Тогда из (1) имеем $|\varphi(z) - \alpha| < C\varepsilon^3$, т. е. f голоморфна вне лим-
нискаты $|w(w - \alpha)| < C\varepsilon^3$. Таким образом, в формуле (3) при $|z| < \varepsilon$ ин-
теграл можно брать по лимнискате $|g(\eta)| = C\varepsilon^3$. Пусть, далее, $C(\varepsilon) =$
 $= \max |f|$ на этой лимнискате. Тогда, очевидно,

$$|a_n(z, w)| \leq C(\varepsilon)(C\varepsilon^3)^n(1+|w|).$$

По неравенству Бернштейна—Уолша во всем $\mathbb{C}^2$ имеет место нера-
венство

$$|a_n(z, w)| \leq C(\varepsilon)(C\varepsilon^3)^n \left(\frac{1+|z|}{\varepsilon} \right)^{2n} (1+|w|) =$$

$$= C(\varepsilon) \cdot (C\varepsilon)^n (1+|z|)^{2n} (1+|w|).$$

Таким образом, для общего члена ряда (2) получается оценка

$$\left| \frac{a_n(z, w)}{g^n(w)} \right| \leq \frac{C(\varepsilon)(C\varepsilon)^n (1+|z|)^{2n} (1+|w|)}{|g(w)|^n},$$

из которой следует, что ряд (2) равномерно сходится в области

$$|g(w)| > C_4 \cdot \varepsilon \cdot (1+|z|)^2.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ функция f голоморфно продолжается
в $\mathbb{C}^2 \setminus \{g(w) = 0\}$. Возвращаясь к старым переменным, получаем,
что исходная функция голоморфна в дополнении к алгебраическому
множеству в $\mathbb{C}^2$. Так как на каждой прямой $z = \lambda w$, $|\lambda| < r$ это мно-
жество имеет лишь одну точку, то (см. (5)) степень этого множества
равна 1, т. е. множество особенностей f —линейное.

В заключение приношу глубокую благодарность А. А. Гончару
и Е. М. Чирке за помощь в работе.

Ереванский электротехнический завод

Министерства электротехнической промышленности СССР

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Առանձնահատուկ եզակի կետերով ֆունկցիայի հոլոմորֆ
շարունակելիության մասին $\mathbb{C}^n$ -ում

Հոդվածում դիտարկվում են $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ տարածության որևէ տիրույթում
հոլոմորֆ ֆունկցիաներ, որոնք ըստ փոփոխականներից մեկի, հոլոմորֆ շա-
րունակվում են համապատասխան կոմպլեքս հարթությունում, բացառությամբ
միակ եզակի կետի:

Ստացված է այդպիսի ֆունկցիաների եզակի կետերի բազմության անա-

լիտիկության մասին թեորեմ, որը Հևիի դասական թեորեմի ընդհանրացումն է:
Հիմնական թեորեմը կոնկրետ տիրույթի դեպքում պնդում է, որ այդ-
պիսի ֆունկցիան կարելի է հոլոմորֆ շարունակել ամբողջ C^n տարածու-
թյուն, բացի որևէ գծային ֆունկցիայի զրոներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Наука, 1964. ² М. В. Казарян, ДАН АрмССР, т. 67, № 2 (1978). ³ Е. М. Чирка, Мат. сб., т. 100 (142), № 1 (1976). ⁴ Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., Наука, 1976. ⁵ Д. Мамфорд, Алгебраическая геометрия, Мир, М., 1979.

