ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 1

УДК 517. 518. 5

МАТЕМАТИКА

А. Э. Джрбашян

Некоторые результаты о мультипликаторах преобразований Фурье в весовых пространствах L^p

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 7/IV 1982)

Настоящая работа посвящена изучению мультипликаторов интегралов Фурье в весовых пространствах. Основными результатами являются теоремы 6 и 7, которые обобщают недавние результаты П. Шёлина и П. Шёгрена (1) на случай весовых пространств.

1. *Первые определения и результаты.* Пусть m—ограниченная измеримая функция, определенная на вещественной оси $\mathbf{R}$. Определим линейный оператор при помощи соотношения

$$(T_m f)^\wedge(x)=m(x)\hat{f}(x),$$

где $\hat{f}$—преобразование Фурье функции f. Функция m называется мультипликатором в $L^p_w=\{f:\|f\|^p_{p,w}=\int_R|f(x)|^p w(x)dx<\infty\}$, если

$$\|T_m f\|_{p,w}\leqslant C\|f\|_{p,w},$$

где C не зависит от f. Мы пишем тогда $m\in M^p(w)$.

Пусть I—некоторый интервал (конечный или нет) $I\subset\mathbf{R}$. Определим оператор взятия частичной суммы следующим образом:

$$(S_I f)^\wedge(x)=\chi_I(x)\hat{f}(x),$$

где χ_I—характеристическая функция интервала I.

Если $R=\{I_j\}$ некоторая последовательность интервалов, то определим оператор S_R (обобщенный оператор взятия частичной суммы), действующий из $L^2(l^2)$ в себя по правилу

$$S_R f=(S_{I_1}f_1,\ S_{I_2}f_2,\ \ldots),$$

где $f=(f_1,\ f_2,\ \ldots)$ принадлежит $L^2(l^2)$.

Если k—целое, $-\infty<k<\infty$, то разложение $\mathbf{R}=\mathbf{R}_+\cup\mathbf{R}_-\cup\{0\}$, где $\mathbf{R}_+=\bigcup_k(2^k,\ 2^{k+1}]$ и $\mathbf{R}_-=\bigcup_k[-2^{k+1},\ -2^k)$, называется двоичным разложением Литтлвуда—Пэли.

Определение. Локально интегрируемая на $\mathbf{R}$ неотрицательная функция w принадлежит классу Макенхоупта A_p, $1<p<\infty$, если

$$\sup_I\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1}\leqslant C,$$

где sup берется по всем конечным отрезкам I, $I \subset \mathbf{R}$ и $|I|$—длина этого отрезка.

Теорема 1. *Если $m \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, m и $|x||m'(x)|$ ограничены на $\mathbf{R}$, то m является мультипликатором класса L^p_w, $1 < p < \infty$, если $w \in A_p$.*

Доказательство более общей теоремы в случае любого $n \geq 1$ см. [2], теорема 1 или [3], теорема 3.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для векторнозначных функций и принадлежит Х. Трибелю [4]. Однако она справедлива только в случае $w(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < p-1$.

Обозначим через $L^p_w(l^2)$ пространство последовательностей функций $f = \{f_j\}$, для которых

$$\|f\|^p_{p,w} \equiv \|f\|^p_{L^p_w(l^2)} = \int\limits_R \left(\sum_{j \geq 1} |f_j(x)|^2 \right)^{p/2} w(x)\,dx < \infty$$

при некотором весе w и $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. *Пусть имеем последовательность ограниченных измеримых функций $m(x) = \{m_j(x)\}_{j \geq 0}$ таких, что $m_j \in C^1(\mathrm{R} \setminus \{0\})$ и*

$$\left(\sum_{j \geq 1} |m_j'(x)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x|}.$$

Определим оператор $T_m f$, действующий в $L^p_w(l^2)$ по правилу

$$(T_m f(x))^\wedge = \{(T_{m_j} f_j(x))^\wedge\}_{j \geq 1} = \{m_j(x) \hat{f}_j(x)\}_{j \geq 1}.$$

Тогда, если $1 < p < \infty$ и $w(x) = |x|^\alpha$, $-1 < \alpha < p-1$, то T_m является ограниченным оператором в $L^p_w(l^2)$:

$$\|T_m f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w}.$$

Следующие три теоремы—весовые аналоги хорошо известных классических теорем. Их доказательства точностью копируют доказательства соответствующих безвесовых теорем (см. [5], гл. 4, теоремы 4, 5 и 6). Единственный новый факт, необходимый для доказательства, — известная теорема Ханта—Макенхоупта—Видена об ограниченности преобразования Гильберта в весовых пространствах [6]. Несколько усложненные доказательства теорем 3—5 имеются также в [2].

Теорема 3. *Для любого семейства интервалов $R = \{I_j\}$ и $f \in L^p_w(l^2)$*

$$\|S_R f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w}$$

при $1 < p < \infty$, если $w \in A_p$.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{R} = \bigcup_k \rho_k$—двоичное разложение вещественной оси. Если S_k—соответствующий мультипликаторный оператор, $(S_k f)^\wedge = \chi_{\rho_k} \hat{f}$, то при $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ имеют место неравенства*

$$C_1 \|f\|_{p,w} \leq \|(\sum_k |S_k f|^2)^{1/2}\|_{p,w} \leq C_2 \|f\|_{p,w}.$$

Теорема 5. *Пусть функция m ограничена на* $\mathbf{R}$ *и имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, не содержащем начала координат. Если по всем двоичным интервалам I*

$$\sup_I \int_I |dm(x)| \leqslant C$$

и если $1<p<\infty$, $w \in A_p$, *то* $m \in M^p(w)$.

2. *Основные результаты* В этом пункте мы докажем наши основные результаты, которые существенно опираются на теоремы 1—5. Для этого потребуется ввести еще несколько понятий и определений.

Пусть $E \subset \mathbf{R}$—замкнутое множество нулевой меры Лебега и $\mathbf{R} \setminus E = \bigcup_k I_k$, I_k—дополнительные интервалы множества E. Пусть χ_k—характеристическая функция интервала I_k и $(S_k f)^\wedge = \chi_k \hat{f}$.

Следуя ([1]), будем говорить, что E обладает свойством $LP(p, w)$, если

$$C_1 \|f\|_{p,w} \leqslant \|(\sum_k |S_k f|^2)^{1/2}\|_{p,w} \leqslant C_2 \|f\|_{p,w} \tag{1}$$

для некоторой весовой функции w и $1<p<\infty$.

E имеет свойство $HM(p, w)$, если любая функция $m \in C^1(\mathbf{R} \setminus E)$ такая, что

$$|m(x)| + d_E(x)|m'(x)| \leqslant C, \tag{2}$$

является мультипликатором в L^p_w. Здесь $d_E(x) = \mathrm{dist}(x, E)$.

Наконец, E имеет свойство $\mathrm{Mar}(p, m)$, если любая функция m локально конечной вариации в $\mathbf{R} \setminus E$, для которой

$$\sup_k \int_{I_k} |dm(x)| < \infty, \tag{3}$$

принадлежит $M^p(w)$.

Теоремы 1—5 показывают, что множество $E = \{0\}$ (а также любое одноточечное множество) обладает всеми тремя этими свойствами, если $1<p<\infty$, $w \in A_p$.

В работе ([1]) показано, что свойствами LP, HM и Mar при $w(x) \equiv 1$ обладают также некоторые, довольно общие множества. Мы покажем, что это верно и для пространства L^p_w при $1<p<\infty$ и некоторых w.

Теорема 6. *Если $E \subset \mathbf{R}$—замкнутое множество нулевой меры,* $1<p<\infty$, $w(x) = |x|^\alpha$, $-1<\alpha<p-1$, *то свойства* $LP(p, w)$, $HM(p, w)$ и $\mathrm{Mar}(p, w)$ *эквивалентны.*

Доказательство существенно опирается на теоремы 1—5 и следует той же схеме, что и доказательство классического результата (см. ([5])).

Пусть E и E' замкнутые множества нулевой меры Лебега на $\mathbf{R}$. Назовем E' преемником E, если существует константа $c>0$ такая, что из $x, y \in E'$ и $x \neq y$ следует $|x-y| \geqslant c d_E(x)$.

Теорема 7. *Если E имеет свойство $LP(p, |x|^\alpha)$, $-1<\alpha<p-1$, то этим же свойством обладает любой его преемник E'.*

Доказательство. Пусть E' — преемник E, $\mathbf{R}\setminus E'=\bigcup_k (a_k, b_k)$ и пусть $\chi'_k=\chi_{(a_k, b_k)}$. Построим функции $\varphi_k \in C^\infty(\mathbf{R}\setminus E)$, $\varphi_k\geqslant 0$ со свойствами

1) $\varphi_k=1$ на $[a_k, b_k]$;

2) $\sup\limits_k \sup\limits_x \{\varphi_k(x)+d_E(x)|\varphi'_k(x)|\}<\infty$;

3) $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \left[a_k-\dfrac{d_E(a_k)}{2},\quad b_k+\dfrac{d_E(b_k)}{2}\right]$.

Тогда, как видно из условия 3), только у конечного числа функций φ_k носители пересекаются. Из теоремы 6 следует, что E имеет также свойство $HM(p, |x|^\alpha)$, $1<p<\infty$, $-1<\alpha<p-1$. Поэтому суммы $\sum\limits_k \pm\varphi_k$ при любых комбинациях знаков принадлежат $M^p(|x|^\alpha)$, $-1<\alpha<p-1$. Применяя средние Радемахера, получим

$$\|(\sum_k |G_k|^2)^{1/2}\|_{p, |x|^\alpha}\leqslant C\|f\|_{p, |x|^\alpha}$$

при $1<p<\infty$, $-1<\alpha<p-1$, где $\widehat{G}_k=\varphi_k\widehat{f}$.

Обозначим $\widehat{F}_k=\chi'_k\widehat{f}$ и заметим, что $\chi'_k=\chi'_k\varphi_k$. Поэтому $F_k=S_k G_k$, где $(S_k f)^\wedge=\chi'_k\widehat{f}$. Применив теперь теорему 3 в случае $R=\{(a_k, b_k)\}$, получим

$$\|(\sum_k |F_k|^2)^{1/2}\|_{p, |x|^\alpha}\leqslant C\|f\|_{p, |x|^\alpha}.$$

Теорема доказана.

Последовательность точек $\{x_k\}$, стремящуюся к точке $x\in\mathbf{R}$, назовем лакунарной, если $x_k\neq x$ и существует число $q<1$ такое, что $(x_{k+1}-x)/(x_k-x)\leqslant q$.

Определим лакунарную последовательность порядка n индуктивно следующим образом. Лакунарная последовательность порядка 0 — это просто одноточечное множество. Лакунарная последовательность порядка n — это преемник лакунарной последовательности порядка $n-1$.

Ввиду этого определения мы немедленно получаем

Следствие. Лакунарное множество конечного порядка обладает всеми тремя свойствами $LP(p, w)$, $HM(p, w)$ и $\mathrm{Mar}(p, w)$, если $1<p<\infty$, $w(x)=|x|^\alpha$, $-1<\alpha<p-1$.

Примером лакунарной последовательности порядка 1 служит любое множество вида $\{a^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $a>1$.

Лакунарную последовательность порядка 2 можно получить, если подходить к каждой точке предыдущей последовательности таким же образом. Следовательно, множество вида $\{a^k+b^j\}_{k,j=-\infty}^{\infty}$, где $a>1$ и $b>1$, является лакунарной последовательностью порядка 1.

Аналогично можно получить примеры лакунарных последовательностей любого конечного порядка.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Որոշ արդյունքներ Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների վերաբերյալ կշռային L^p դասերում

Հոդվածում ցույց է տրված, որ եթե առանցքի վրա որոշված սահմանափակ ֆունկցիան ունի «շատ» եզակի կետեր, իսկ մյուս կետերում բավարարում է ողորկության որոշ պայմանների, ապա այն հանդիսանում է Ֆուրյեի ձևափոխության մուլտիպլիկատոր կշռային L^p դասերում որոշ կշիռների համար $1<p<\infty$: Այդպիսով ընդհանրացվում են Պ. Շյոլինի և Պ. Շյոգրենի արդյունքները կշռային տարածություններում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *P. Sjögren, P. Sjölin*, Uppsala Univ., Dept. of Math. Report, 1980 : 1. [2] *D. S. Kurtz*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 259, № 1 (1980). [3] *А. Э. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 16, № 3 (1981). [4] *H. Triebel*, Math. Nachr. vol. 78 (1977). [5] *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, М., 1973. [6] *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176 (1973).