ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXVI 1983 1

УДК 517.574

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

Условия типа критерия Н. Винера и оценки для потенциалов и субгармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 3/V 1982)

В п. 1 рассматриваются потенциалы Рисса u^{μ}_{α} $(0<\alpha<m)$ в m-мерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 3)$ и потенциалы Грина u^{μ} в единичном m-мерном шаре $\mathbf{D}^m$ $(m\geqslant 2)$. Показывается, что функция вида ωu, где $\omega>0$ задается борелевской мерой μ, имеет предел по некоторому фильтру, элементы которого определяются условием типа критерия Н. Винера ([1]) для иррегулярности точки в задаче Дирихле. Полученные теоремы содержат, усиливают или дополняют результаты А. Картана ([2]), Альфорса—Хейнса ([3]) и др.

В п. 2 рассматриваются функции w вида $w=u-v$, где u, v—субгармонические в $\mathbf{R}^m$ или в $\mathbf{D}^m$ $(m\geqslant 2)$. Получена оценка для функций $w\not\equiv\infty$, справедливая вне исключительного множества, определяемого условием типа критерия Н. Винера; в формулировке этой оценки участвует неванлинновская ([4]) характеристическая функция. С. Н. Мергелян ([5]) установил теорему единственности для гармонических в $\mathbf{D}^3$ функций; в точном виде этот результат получен В. Рао ([6]). А. Л. Шагинян в ([7]) формулирует точную теорему единственности для ограниченных аналитических в круге функций. Теорема 5 есть такое утверждение для определенных в $\mathbf{D}^m$ функций w с ограниченной характеристикой.

1. Используются следующие величины. Для $x\in\mathbf{R}^m$, $x=(x_1,\ldots, x_m)$, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_m^2)^{\frac{1}{2}}$, $C(x, r)=\{\xi\in\mathbf{R}^m:|x-\xi|<r\}$—шар радиуса $r>0$, $\Delta^m=(|\xi|=1)$—единичная $(m-1)$-мерная сфера, $g(x, \xi)$—функция Грина $\mathbf{D}^m$. Если мера $0\leqslant\mu\leqslant+\infty$ задана в области $G\subseteq\mathbf{R}^m$, то число $0<\mu_0\leqslant+\infty$ всегда означает: $\mu_0=\mu(G)$. Для компакта $e\neq\varnothing$ $\mathfrak{M}=\{\mu: :\mathrm{supp}(\mu)\subseteq e,\ \mu(e)=1\}$,

$$C\{e; k\}=\left(\inf_{\mu\in\mathfrak{M}}\left\{\iint\limits_{e\times e} k(x, \xi)d\mu(x)d\mu(\xi)\right\}\right)^{-1}$$

—емкость e ([8]); когда e — не компакт, $C\{e; k\}$ будет означать внешнюю емкость. Выбирая ядро $k=k(x, \xi)$, определим емкости c_α, c_g, c_2: если $e\subset\mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 3)$, то $c_\alpha(e)=C\{e; |x-\xi|^{\alpha-m}\}$, если $e\subset\mathbf{D}^m (m\geqslant 2)$, то $c_g(e)=C\{e; g(x, \xi)\}$, если $e\subset\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$, то $c_2(e)=c\left\{e; \log\frac{|x|}{|x-\xi|}\right\}$; понятно, что для $e\subset\Delta^2$ $c_2(e)$ совпадает с логарифмической емкостью.

Если μ—мера в $\mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 3)$ или в $\mathbf{D}^m$ $(m\geqslant 2)$, то

$$u_\alpha^\mu(x)=\int\limits_{|\xi|<\infty}|x-\xi|^{\alpha-m}d\mu(\xi),\quad u^\mu(x)=\int\limits_{|\xi|<1}g(x,\xi)d\mu(\xi)$$

—соответственно потенциалы Рисса и Грина.

Множество $e\subset\mathbf{R}^m$ ($m\geqslant3$) называется (α—) разреженным в точке $\xi\in\mathbf{R}^m$, $\xi\notin e$ в случае, когда ξ—изолированная точка для e или когда ξ—предельная точка для e и $\exists$ потенциал u_α^μ так, что $u_\alpha^\mu(\xi)<\varliminf_{x\to\xi}u_\alpha^\mu(x)$, $x\in e$ [8–10]. Согласно теореме М. Брело [10] e тогда и только тогда разрежено в ξ, когда для некоторого $0<q<1$ и $e_n=e\cap\{x:q^{n+1}\leqslant|x-\xi|<<q^n\}$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n(\alpha-m)}c_\alpha(e_n)<\infty;\tag{1}$$

условие (1) с $\alpha=2$ есть критерий Винера [1].

$e\subset\mathbf{R}^m$ ($m\geqslant3$) называем разреженным в ∞, если для некоторого $q>1$ и $e_n=e\cap\{x:q^n<|x|\leqslant q^{n+1}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n(\alpha-m)}c_\alpha(e_n)<\infty.$$

$e\subset\mathbf{D}^m$ ($m\geqslant2$) называем разреженным в Δ^m, если для некоторого $0<<q<1$ и $e_n=e\cap\{x:q^{n+1}\leqslant1-|x|<q^n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n(2-m)}c_g(e_n)<\infty.$$

Для $\xi\in\mathbf{R}^m$ $\mathcal{F}_\xi=\{e\subset\mathbf{R}^m,\ \xi\in e:\mathbf{R}^m|e$—разрежено в $\xi\}$ является фильтром в $\mathbf{R}^m$; $\mathcal{F}=\{e\subset\mathbf{D}^m:\mathbf{D}^m|e$—разрежено в $\Delta^m\}$ является фильтром в $\mathbf{D}^m$; для $\xi\neq\infty$ предел по $\mathcal{F}_\xi$ совпадает с тонким [8–10] пределом.

Для потенциала u (и точки $\xi\in\overline{\mathbf{R}}^m$) определим совокупность Ω монотонных функций $\omega>0$:
если $u=u_\alpha^\mu$ и $\xi\neq\infty$, то $\forall\omega\in\Omega_{\xi,u}$

$$\int\limits_{|x-\xi|<1}\frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^{m-\alpha}}d\mu(x)<\infty,\ r^{\alpha-m}\omega(r)\downarrow,\ \ \omega(r)\uparrow,\ \ r\in(0,1);$$

если $u=u_\alpha^\mu$, то $\forall\omega\in\Omega_{\infty,u}$,

$$\int\limits_{|x|>1}\frac{\omega(|x|)}{|x|^{m-\alpha}}d\mu(x)<\infty,\ r^{\alpha-m}\omega(r)\downarrow\omega_0,\ \omega(r)\uparrow,\ r\in(1,\infty);\tag{2}$$

если $u=u^\mu$, то $\forall\omega\in\Omega_u$,

$$\int\limits_{|x|<1}\frac{\omega(|x|)}{(1-|x|)^{m-2}}d\mu(x)<\infty,\ \ \frac{\omega(r)}{(1-r)^{m-2}}\Big\downarrow,\ \ \frac{\omega(r)}{(1-r)^{m-1}}\Big\uparrow,\ \ r\in(0,1);$$

в (2) $\omega_0\geqslant0$—некоторое число.

Теорема 1. *Если $u=u_\alpha^\mu$—потенциал Рисса в $\mathbf{R}^m$ ($m\geqslant3$), $\xi\in\overline{\mathbf{R}}^m$, $\omega\in\Omega_{\xi,u}$, то для $\xi\neq\infty$*

$$\lim_{\mathcal{F}_\xi}\omega(|x-\xi|)u(x)=\begin{cases}0, & u(\xi)=+\infty\\ \omega(+0)u(\xi), & u(\xi)\neq+\infty\end{cases}\tag{3}$$

и для $\xi=\infty$

$$\lim_{\mathcal{F}_\infty} \omega(|x|)u(x)=\begin{cases}0 & , \quad \mu_0=+\infty \\ \omega_0\mu_0, & \mu_0\neq+\infty\end{cases}. \tag{4}$$

Если u^μ *— потенциал Грина в* D^m $(m\geqslant 2)$, $\omega\in\Omega_{u^\mu}$, *то*

$$\lim_{\mathcal{F}} \omega(|x|)u^\mu(x)=0.$$

Здесь (3) содержит теорему А. Картана ([2]) о непрерывности (квазивсюду) в тонкой топологии потенциала Ньютона; (4) получается из (3) в результате преобразования Кельвина и усиливает теорему Дени—Хеймана ([11]) (теорема 3.21).

Следующая теорема есть аналог соответствующих результатов А. Картана и М. Брело ([10]).

Теорема 2. *Если функция* $f: D^m\to\overline{R}^1$ *имеет предел* s *по фильтру* $\mathcal{F}$, *то* $\exists$ *разреженное в* Δ^m *множество* e *так, что* $\lim f(x)=s$ $(|x|\to 1,\ x\notin e)$. *Множество* $e\subset D^m$ $(m\geqslant 2)$ *с предельными точками на* Δ^m *тогда и только тогда разрежено в* Δ^m, *когда* $\exists$ *потенциал Грина* $u^\mu\not\equiv\infty$ *в* D^m *так, что* $\lim\limits_{\substack{|x|\to 1\\ x\in e}} (1-|x|)^{m-1}u^\mu(x)=+\infty$.

Ниже $[\xi, \eta]$ означает прямолинейный отрезок, соединяющий точки ξ, η; $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ — некоторое число.

Следствие 1. *Если* u^μ *— потенциал Грина в* D^m *и*

$$\int\limits_{|x|<1} (1-|x|)^\lambda d\mu(x)<\infty,$$

то $\exists$ *разреженное в* Δ^m *множество* e, $\exists e'\subset\Delta^m$, $c_2(e')=0$, $\forall\xi\in\Delta^m\exists e''\subset\subset\Delta^m$, $c_2(e'')=0$ *так, что* $\forall\eta'\in\Delta^m\setminus e'$, $\forall\eta''\in\Delta^m|e''$ *выполнено*

$$\lim_{\substack{|x|\to 1\\ x\notin e}} h(x)=\lim_{r\to 1-0} h(r\eta')=\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in[\xi,\eta'']}} h(x)=0, \text{ где } h(x)=(1-|x|)^{m-2+\lambda}u^\mu(x).$$

При $m=2$ и $\lambda=1$ следствие 1 (после его переформулировки для случая полуплоскости P — для этого достаточно конформно отобразить D^2 на P) уточняет (см. также ([12]) и теорему Л. Наим в ([13])) результат Альфорса—Хейнса ([3]). При $m=2$ (и $\lambda=0$) следствие 1 дополняет соответствующие теоремы М. Цудзи ([14]) и Дж. Литтлвуда ([15,16]). Теорема 3 показывает, что при $m=2$ требование $c_2=0$ в следствии 1 усилить невозможно.

Теорема 3. *Для* $\forall e\subset\Delta^2$, $c_2(e)=0$ *и произвольной функции* $0<p(r)\leqslant 1$ *существуют потенциалы Грина* u^μ, $u^{\mu'}\not\equiv\infty$ *такие, что*

$$\forall\eta\in e\ \varlimsup_{r\to 1-0} p(r)u^\mu(r\eta)=\varlimsup_{\substack{x\to 1\\ x\in[1,\eta]}} p(|x|)u^{\mu'}(x)=+\infty.$$

2. Для функции w, представимой в виде $w=u-v$, где u, v — субгармонические в R^m (или в D^m), $m\geqslant 2$, используется обозначение $w\in\Delta(R^m)$ (или $w\in\Delta(D^m)$); всегда предполагается, что u, v гармоничны в $x=0$. Если $w\in\Delta$, то

$$T(r, w)=\frac{1}{c_m r^{m-1}}\int\limits_{\partial D_r^m} \max\{w(x), 0\}d\sigma(x)+\int\limits_{D_r^m} g(0, \xi, D_r^m)d\nu(\xi)$$

—характеристическая функция Р. Неванлинны ([4]); здесь c^m—площадь поверхности Δ^m, $d\sigma$—элемент площади поверхности ∂D_r^m, g—функция Грина D_r^m $(=C(0, r))$, ν—мера Рисса v. Мы используем функцию $T_w(r)=T(r, w)-w(0)$. Дальше $k>1$, $0<\theta<1$—произвольные числа.

Для $w\in\Delta$ определим совокупность $\Omega^{(w)}=\{\omega\}$ заданных на $(1, +\infty)$ или на $(0, 1)$ функций $\omega\downarrow$, $\omega>0$:
если $w\in\Delta(\mathbf{R}^m)$, μ—мера Рисса u, то $\forall\omega\in\Omega^{(w)}$

$$\int\limits_{|x|<\infty}\omega(|x|)d\mu(x)<\infty,\quad \varlimsup_{r\to+\infty}\omega(r)T_w(r)=\sigma_\omega<\infty;$$

если $w\in\Delta(D^m)$, μ—мера Рисса u, то $\forall\omega\in\Omega^{(w)}$

$$\int\limits_{|x|<1}\omega(|x|)d\mu(x)<\infty,\quad \varlimsup_{r\to1-0}\omega(r)\frac{T_w(r)}{(1-r)^{m-1}}=\sigma_\omega<\infty.$$

Лемма. *Пусть $m\geqslant2$, $T_w(r)=O(1)$; если $w\in\Delta(\mathbf{R}^m)$, то $r^{2-m}\in\in\Omega^{(w)}$, если $w\in\Delta(D^m)$, то $(1-r)^{m-1}\in\Omega^{(w)}$. Пусть $m\geqslant2$, $T_w(r)\uparrow\infty$, $0<<\tau<1$—убывающая к 0 функция, заданная на $[1,+\infty)$ или на $[0,1]$; если $w\in\Delta(\mathbf{R}^m)$ и $\forall r$ $\tau(kr)\leqslant\theta_k\tau(r)$, то $\tau(kr)r^{2-m}(T_w(r))^{-1}\in\Omega^{(w)}$ и если $w\in\Delta(D^m)$ и τ—выпуклая, то $\tau(r)(1-r)^{m-1}(T_w(r+\theta(1-r)))^{-1}\in\Omega^{(w)}$.*

$e\subset\mathbf{R}^m$ $(m\geqslant2)$ называем $(*)$-разреженным в ∞, если для некоторого $q>1$ и $e_n=e\cap\{x: q^n\leqslant|x|<q^{n+1}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_2(e_n)<\infty. \tag{5}$$

$e\subset D^m$ $(m\geqslant2)$ называем $(*)$-разреженным в Δ^m, если для некоторого $0<q<1$ и $e_n=e\cap\{x: q^{n+1}\leqslant1-|x|<q^n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_g(e_n)<\infty.$$

Согласно лемме 5.5 из ([8]) при $m\geqslant3$ (5) равносильно неравенству $c_2(e)<\infty$.

Теорема 4. *Если $w\in\Delta(\mathbf{R}^m)$, $m\geqslant2$, $\omega\in\Omega^{(w)}$, то $\exists$ $(*)$-разреженное в ∞ открытое множество $e_{\omega,k}\subset\mathbf{R}^m$ так, что для некоторой постоянной $0<c_{\omega,k}<\infty$*

$$\varliminf_{\substack{|x|\to\infty\\ x\notin e_{\omega,\theta}}}\omega(k|x|)w(x)\geqslant-c_{\omega,k}\sigma_\omega.$$

Если $w\in\Delta(D^m)$, $m\geqslant2$, $\omega\in\Omega^{(w)}$, то $\exists$ $(*)$-разреженное в Δ^m открытое множество $e_{\omega,\theta}\subset D^m$ так, что для некоторой постоянной $0<c_{\omega,\theta}<\infty$

$$\varliminf_{\substack{|x|\to1\\ x\notin e_{\omega,\theta}}}\omega(|x|+\theta(1-|x|))w(x)\geqslant-c_{\omega,\theta}\sigma_\omega.$$

Оценки для функций w, в которых исключительное множество описывается в метрических терминах, см., например, в ([17,18]). Из доказательства теоремы 4 можно заметить, что $e_{\omega,\theta}$ есть объединение открытых $L_n\subset D^m$ таких, что

$$L_n \underset{n}{\to} \Delta^m, \quad \frac{1-\inf\{|x| : x\in L_n\}}{1-\sup\{|x| : x\in L_n\}} \leqslant c < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_g(L_n) < \infty;$$

такие множества рассматривались в ([19]).

Теорема 5. *Пусть* $w\in\Delta(\mathrm{D}^m)$, $m\geqslant 2$, $T_w(r)=O(1)$ *и* $e\subset \mathrm{D}^m$ *не разрежено в* Δ^m; *тогда если*

$$\lim_{\substack{|x|\to 1-0 \\ x\in e}} (1-|x|)^{m-1} w(x) = -\infty, \text{ то } w\equiv -\infty. \tag{6}$$

Требование о неразреженности в Δ^m множества e в (6) неулучшаемо (см. теорему 2); пример функции $P(x, \xi) = \dfrac{1-|x|^2}{|x-\xi|^m}$ ($\xi\in\Delta^m$, P—ядро Пуассона) показывает, что когда e находится в области Штольца с вершиной ξ, то в (6) указан точный порядок убывания. Гипершар D^{m-1} не разрежен в Δ^m; произвольный треугольник из D^3 с вершиной в Δ^3 не разрежен в Δ^3.

Автор признателен академику АН Армянской ССР С. Н Мергеляну за внимание к работе.

Ереванский научно-исследовательский проектный институт
автоматизированных систем управления городом

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Վիների հայտանիշը և գնահատականներ պոտենցիալների և սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար

Դիտարկվում են Ռիսսի $u=u^\mu_\alpha$ *պոտենցիալները* R^m ($m\geqslant 3$, $0<\alpha<m$) m*—չափանի էվկլիդյան տարածությունում և Գրինի* $u=u^\mu$ *պոտենցիալները* D^m ($m\geqslant 2$) *միավոր գնդում։ Ցույց է տրված, որ* ωu *տեսքի ֆունկցիան, որտեղ* $\omega>0$*-ն որոշվում է* $\mu\geqslant 0$ *բորելյան չափով, ունի վերջավոր սահման, երբ* $|x|\to\infty$ *կամ* $|x|\to 1-0$ *և* $x\notin e$*։ Բացառիկ բազմությունը որոշվում է Դիրիխլեի խնդրում կետի իռեգուլյարության համար Վիների հայտանիշի տիպի պայմանով։ Այդպիսի բազմություններից դուրս ստացված են գնահատականներ* R^m*-ում կամ* D^m*-ում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *N. Wiener*, J. Math. Phys., 3, №3 (1924). [2] *H. Cartan*. Ann. Univ. de Grenoble, Math. Phys, 22, 221—280 (1946). [3] *L. Ahlfors, M. Heins*. Ann. Math., 50, №2 (1949). [4] *И. И. Привалов*, Субгармонические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1937. [5] *С. Н. Мергелян*, УМН, т. 11, №5 (1956). [6] *В. Рао*, Мат. заметки, т. 3, №3 (1968). [7] *А. Л. Шагинян*, ДАН АрмССР, т. 27, №5 (1958). [8] *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, Наука, М., 1966. [9] *М. Брело*, Основы классической теории потенциала, Мир, М., 1964. [10] *М. Брело*, О топологиях и границах в теории потенциала, Мир, М., 1974. [11] *У. Хейман, П. К. Кеннеди*, Субгармонические функции, Мир, М., 1980. [12] *W. K. Hayman*, J. Math. Pures et Appl., 35, №2 (1956). [13] *H. L. Jackson*, Ann. Inst. Fourier, 20/2 (1970). [14] *M. Tsuji*, Comment. Math. Univ. St. Pauli, №1, 1956. [15] *M. Tsuji*, Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959. [16] *J. E. Littlewood*, Proc. London Math. Society, 28 (1929). [17] *И. В. Ушакова*, Зап. мех.-мат. факультета Харьковского ун-та, Харьковского мат. о-ва, т. 29, сер. 4 (1963). [18] *А. Н. Фридман*, Укр. мат. журн., т. 32, №5 (1980). [19] *А. Ю. Шахвердян*, ДАН АрмССР, т. 70, №5 (1980).