ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 5

УДК 538.3

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Р. Г. Тарханян

К теории распространения электромагнитных волн в гиротропных кристаллах

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяном 26/IV 1982)

Большинство гиротропных кристаллов, обладающих свойством естественной оптической активности, существует в двух различных энантиоморфных модификациях — „правой“ и „левой“, вращающих плоскость поляризации электромагнитного излучения в противоположных направлениях (например, кварц SiO_2, киноварь HgS и т. д. ([1,2])). Тензоры диэлектрической проницаемости этих различных модификаций одного и того же вещества отличаются друг от друга лишь при учете пространственной дисперсии первого порядка по малому параметру a/λ (a—постоянная кристаллической решетки, λ—длина волны; в оптической области спектра $a/\lambda\sim 10^{-2}-10^{-3}$). Распространение электромагнитных волн в таких средах и, в частности, особенности отражения и преломления света на границе раздела „правой“ и „левой“ модификаций представляют несомненный интерес, однако для выяснения этих особенностей использование классической феноменологической теории гиротропии в электродинамике сплошных сред ([3]) обосновано недостаточно, и, как указано в ([4,5]), теория нуждается в существенном обобщении и модификации.

В настоящем сообщении предлагается решение задачи об отражении и прохождении света через структуру, состоящую из двух диэлектрических пластин различной толщины, вырезанных из оптически активных анизотропных кристаллов, энантиоморфных друг другу. По обе стороны от границ системы — одинаковая изотропная среда, например, воздух. Будем считать, что граница раздела двух кристаллических пластин совпадает с плоскостью $z=0$, а оптические оси кристаллов ориентированы произвольным образом в плоскости xz. Данная задача в таком виде ранее не решалась. Пусть область пространства $0<z<d_1$ занимает „левое“ вещество, а область $0>z>-d_2$— „правое“. На внешнюю поверхность „правого“ кристалла $z=-d_2$ падает нормально из вакуума электромагнитная волна $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0\sim e^{i(k_0z-\omega t)}$ с произвольной поляризацией.

Уравнения поля по Максвеллу и материальные соотношения в области „правого“ кристалла напишем в виде

$$\mathrm{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \mathrm{div}\vec{B}=0; \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{D}=0; \tag{1б}$$

$$\vec{D}=\hat{\varepsilon}(\vec{E}+\hat{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}), \quad \vec{B}=\hat{\mu}(\vec{H}+\tilde{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}). \tag{2}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ — вещественные и симметричные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, зависящие только от частоты волны ω; $\hat{\alpha}$ — псевдотензор второго ранга, описывающий пространственную дисперсию порядка a/λ; знак тильда означает транспонирование. В случае немагнитных кристаллов, рассмотрением которых мы ограничимся, $\mu_{ij}=\delta_{ij}$ (символ Кронекера). Материальные соотношения типа (2) в рамках микротеории были получены в ([6]), а в феноменологической теории — в ([7,8]).

Уравнения поля по Максвеллу—Иосифьяну и материальные соотношения для „левого" кристалла напишем в виде

$$\mathrm{rot}\vec{H}_g = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}_g}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{D}_g=0; \tag{3а}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}_g = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}_g}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\vec{B}_g=0; \tag{3б}$$

$$\vec{D}_g=\hat{\varepsilon}(\vec{E}_g-\hat{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}_g), \quad \vec{B}_g=\hat{\mu}(\vec{H}_g-\tilde{\alpha}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}_g). \tag{4}$$

Система уравнений (3*а*, *б*) представляет собой инверсно-сопряженную систему уравнений электродинамики, предложенную в работах ([9,10]). Обоснование применимости этих уравнений и доказательство их эквивалентности с уравнениями макроскопической электродинамики в рассматриваемом случае непроводящих сред дано в ([11]). В работе ([12]) указанная система рассматривается с точки зрения бинарного представления уравнений электродинамики для прямого и инверсного пространств. В нашем случае прямая и инверсная системы уравнений применяются в различных геометрических пространствах, заполненных различными кристаллами.

В областях пространства $z>d_1$ и $z<-d_2$ вне рассматриваемой структуры уравнения поля совпадают соответственно с (1) и (3), следует лишь в материальных соотношениях (2) и (4) положить $\alpha_{ij}=0$, $\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}$. На границе раздела „левого" и „правого" кристаллов $z=0$ граничные условия имеют вид

$$[\vec{E}+\vec{E}_g, \vec{Z}]=0, \quad [\vec{H}-\vec{H}_g, \vec{Z}]=0, \quad (\vec{D}+\vec{D}_g)\cdot\vec{Z}=0, \quad (\vec{B}-\vec{B}_g)\cdot\vec{Z}=0, \tag{5}$$

где $\vec{Z}$ — единичный вектор нормали к границе раздела.

Обозначим поля в области $z<-d_2$ верхним индексом *o*, а в области $z>d_1$ — индексом *t*. Тогда условия непрерывности полей на границах раздела $z=-d_2$ и $z=d_1$ принимают вид соответственно

$$[\vec{E}-\vec{E}^0, \vec{Z}]=0, \quad [\vec{H}-\vec{H}^0, \vec{Z}]=0, \quad (\vec{D}-\vec{D}^0)\cdot\vec{Z}=0, \quad (\vec{B}-\vec{B}^0)\cdot\vec{Z}=0; \tag{6а}$$

$$[\vec{E}_g-\vec{E}_t, \vec{Z}]=0, \; [\vec{H}_g-\vec{H}_t, \vec{Z}]=0, \; (\vec{D}_g-\vec{D}_t)\cdot\vec{Z}=0, \; (\vec{B}_g-\vec{B}_t)\cdot\vec{Z}=0. \tag{6б}$$

В связи с видом материальных уравнений (2) и (4) следует отметить, что возможен еще и такой вариант феноменологического описания, когда члены, ответственные за оптическую активность, можно включить лишь в определение вектора электрической индукции. Однако в этом случае аналогично [4,8] можно показать, что условие выполнения баланса потоков энергии на границе раздела двух сред приводит к довольно громоздким граничным условиям, значительно отличающимся от условий (5) и (6*а*, *б*). Именно ввиду простоты последних при описании гиротропии мы отдаем предпочтение изложенному выше подходу, который отличается от общепринятого классического подхода [3].

Система уравнений (1), (3) с материальными соотношениями (2), (4) и граничными условиями (5), (6) позволяет решить любую задачу о распространении, отражении и преломлении электромагнитных волн в сложной системе из гиротропных кристаллов. В дальнейшем рассмотрим случай нормального падения плоской монохроматической волны из изотропной среды с показателем преломления $n_0=\frac{ck_0}{\omega}$ на верхнюю границу „правого" кристалла $z=-d_2$. Обозначим $\vec{E}_r e^{-ik_0 z}$ вектор электрического поля в отраженной волне (множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем); $\vec{E}_1 e^{ik_1 z}$ и $\vec{E}_2 e^{ik_2 z}$ — векторы преломленных волн в области $0>z>-d_2$, идущих от верхней границы; $\vec{E}_3 e^{-ik_1 z}$ и $\vec{E}_4 e^{-ik_2 z}$ — волны в той же области, отраженные от нижней грани $z=0$; $\vec{E}_{g1} e^{ik_{1g} z}$, $\vec{E}_{g2} e^{ik_{2g} z}$, $\vec{E}_{g3} e^{-ik_{1g} z}$, $\vec{E}_{g4} e^{-ik_{2g} z}$ — соответствующие векторы в области „левого" кристалла ($0<z<d_1$) и наконец $\vec{E}_t e^{ik_0 z}$ — вектор электрического поля прошедшей волны в области $z>d_1$. Волновые числа k_1, k_2 и k_{1g}, k_{2g} определяются решением дисперсионных уравнений, характеризующих „правый" и „левый" кристаллы соответственно. Используя уравнения (1*а*, *б*) и материальные отношения (2), нетрудно получить дисперсионное уравнение для „правого" кристалла в виде

$$n^4\left(\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel}-\varkappa^2\alpha_{xx}^2\right)\left(1-\varepsilon_\perp \varkappa^2 \alpha_\perp^2\right)-n^2\left(1+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_\parallel}+2\varepsilon_\perp \varkappa^2 \alpha_\perp \alpha_{xx}\right)+\varepsilon_\perp=0, \qquad (7)$$

где $\varkappa=\frac{\omega}{c}$; $n=\frac{k}{\varkappa}$ — показатель преломления; $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости кристалла вдоль и поперек оптической оси; $\alpha_\parallel$ и $\alpha_\perp$ — соответствующие величины для тензора $\hat{\alpha}$;

$$\varepsilon_{zz}=\varepsilon_\parallel \cos^2\varphi_2+\varepsilon_\perp \sin^2\varphi_2; \qquad (8)$$

$$\alpha_{xx}=\alpha_\perp \cos^2\varphi_2+\alpha_\parallel \sin^2\varphi_2; \qquad (9)$$

φ_2 — угол между оптической осью „правого" кристалла и волновой нормалью. Решения уравнения (7) определяют волновые числа k_1 и k_2, которые с точностью до членов первого порядка по α имеют вид

$$k_{1,2}^2=\frac{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel\varkappa^2}{2\varepsilon_{zz}}\left\{1+\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_\parallel}\pm\left[\left(1-\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_\parallel}\right)^2+4\varepsilon_\perp\varkappa^2(\alpha_\perp+\alpha_{xx})\left(\alpha_{xx}+\alpha_\parallel\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_\parallel}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \quad (10)$$

Используя систему уравнений (3*а*, *б*) для „левого" кристалла и материальные соотношения (4), для волновых чисел k_{1g} и k_{2g} аналогичным образом получим выражения, которые отличаются от (10) лишь тем, что в формулах (8) и (9) для ε_{zz} и α_{xx} угол φ_2 заменяется на угол φ_1, определяющий ориентацию оптической оси „левого" кристалла. Заметим, что в отсутствие гиротропии ($\alpha_{\perp,\parallel}=0$) из (10) получим известные решения [13]

$$\frac{k_1^2}{\varkappa^2}=\varepsilon_\perp; \quad (11)$$

$$\frac{k_2^2}{\varkappa^2}=\frac{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_{zz}}, \quad (12)$$

первое из которых соответствует поперечной волне $\vec{E}=(0,\ E_y,\ 0)$, а второе — необыкновенной волне $\vec{E}(E_x,\ 0,\ E_z)$ с зависящим от угла φ показателем преломления.

Перейдем теперь к определению амплитуд отраженной и прошедшей волн. Используя граничные условия (5), (6*а*) и (6*б*), получим систему 20 линейных уравнений с 20 неизвестными. Исключая из этих уравнений составляющие векторов, характеризующих электромагнитное поле в области $-d_2<z<d_1$, после несложных, но громоздких вычислений получим систему 4-х неоднородных уравнений для составляющих амплитуд отраженной (E_{rx}, E_{ry}) и прошедшей (E_{tx}, E_{ty}) волн:

$$(a_{xl}E_{rx}+a_{yl}E_{ry})e^{ik_0d_2}+\delta_l(b_{xl}E_{tx}-b_{yl}E_{ty})e^{ik_0d_1}=(-1)^l(a^*_{xl}E_{0x}-a^*_{yl}E_{0y})e^{-ik_0d_2}, \quad (13)$$

$l=1-4$. Здесь $\delta_l=1$ для $l=1,4$ и $\delta_l=-1$ для $l=2,3$, а коэффициенты a_{xl} и a_{yl} имеют вид

$$a_{x1}=c_1+c_2+in_0\theta\left(\frac{p_1s_2}{n_2}-\frac{p_2s_1}{n_1}\right),\quad a_{y1}=\frac{in_0\eta}{\varkappa q_1q_2}(c_2-c_1)+\frac{\theta}{\varkappa}\left(\frac{s_1}{n_1}-\frac{s_2}{n_2}\right); \quad (14а)$$

$$a_{x2}=i\varkappa n_0\theta p_1p_2(c_1-c_2)+\varkappa\eta(n_1s_2\xi_2-n_2s_1\xi_1),\ a_{y2}=\theta(p_2c_2-p_1c_1)+$$
$$+i\eta\frac{n_0}{q_1}\xi_2(n_2s_2-n_1s_1); \quad (14б)$$

$$a_{x3}=q_1c_1n_1^2+q_2c_2n_2^2+in_0\theta(p_1n_2q_2s_2-p_2n_1q_1s_1);\quad a_{y3}=$$
$$=\frac{in_0\eta}{\varkappa}\left(\frac{c_2n_2^2}{q_1}-\frac{c_1n_1^2}{q_2}\right)+\frac{\theta}{\varkappa}(n_1q_1s_1-n_2q_2s_2); \quad (14в)$$

$$a_{x4}=n_0\theta(p_1c_2-p_2c_1)+i\eta\left(\frac{n_1s_2}{q_2}-\frac{n_2s_1}{q_1}\right);\quad a_{y4}=\frac{i\theta}{\varkappa}(c_2-c_1)+\eta\frac{n_0}{\varkappa q_1q_2}(n_1s_1-$$
$$-n_2s_2); \quad (14г)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} c_1=\cos(k_1d_2), \quad c_2=\cos(k_2d_2), \quad s_1=\sin(k_1d_2), \quad s_2=\sin(k_2d_2), \\ q_j^{-1}=\varepsilon_\perp-n_j^2, \ j=1,2; \ \xi_j=\alpha_\perp\varepsilon_\perp+\alpha_{xx}n_j^2, \ p_j=q_j\xi_j, \ \theta^{-1}=p_2-p_1, \\ \eta^{-1}=\varepsilon_\perp^2(\alpha_\perp+\alpha_{xx})(n_1^2-n_2^2), \ \zeta=\dfrac{n_1n_2}{\varepsilon_1(n_1^2-n_2^2)}. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Выражения для коэффициентов b_{xl} и b_{yl} в (13) отличаются от a_{xl} и a_{yl} лишь заменой в (15) величин k_1, k_2 и d_2 на k_{1g}, k_{2g} и d_1 соответственно. Решение системы уравнений (13) удобно представить в матричном виде

$$\vec{E}_r=\hat{R}\vec{E}_0, \qquad \vec{E}_t=\hat{T}\vec{E}_0, \tag{16}$$

где элементы матриц $\hat{R}=\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$ и $\hat{T}=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ даются выражениями

$$R_i=\frac{D_i^{(r)}}{D}e^{-2ik_0d_3}, \qquad i=1-4; \tag{17}$$

$$T_i=\frac{D_i}{D}e^{-ik_0(d_1+d_2)}, \qquad i=1-4; \tag{18}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{x1} & a_{y1} & b_{x1} & -b_{y1} \\ a_{x2} & a_{y2} & -b_{x2} & b_{y2} \\ a_{x3} & a_{y3} & -b_{x3} & b_{y3} \\ a_{x4} & a_{y4} & b_{x4} & -b_{y4} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$D_1^{(r)}$, $D_3^{(r)}$, D_1 и D_3—определители, которые получаются из (19) заменой соответственно первого, второго, третьего и четвертого столбцов на столбец с элементами $(-a_{x1}^*, a_{x2}^*, -a_{x3}^*, a_{x4}^*)$, а $D_2^{(r)}$, $D_4^{(r)}$, D_2 и D_4—аналогичной заменой на столбец с элементами $(a_{y1}^*, -a_{y2}^*, a_{y3}^*, -a_{y4}^*)$. Используя (16), для коэффициентов отражения и прохождения получим соответственно

$$R=\frac{|R_1+\nu_0R_2|^2+|R_3+\nu_0R_4|^2}{1+|\nu_0|^2}; \tag{20}$$

$$T=\frac{|T_1+\nu_0T_2|^2+|T_3+\nu_0T_4|^2}{1+|\nu_0|^2}, \tag{21}$$

где $\nu_0=\dfrac{E_{oy}}{E_{ox}}$ определяет поляризацию падающей волны. Поляризация отраженной и прошедшей волн определяются соотношениями

$$\nu_r=\frac{E_{ry}}{E_{rx}}=\frac{R_3+\nu_0R_4}{R_1+\nu_0R_2}, \qquad \nu_t=\frac{E_{ty}}{E_{tx}}=\frac{T_3+\nu_0T_4}{T_1+\nu_0T_2}. \tag{22}$$

Обе эти волны обладают, вообще говоря, эллиптической поляризацией, причем степень эллиптичности (отношение длин осей эллипса) равна

$$\varepsilon=\frac{2\operatorname{Im}\nu}{1+|\nu|^2+\sqrt{(1+|\nu|^2)^2-4(\operatorname{Im}\nu)^2}}. \tag{23}$$

При $\nu=\pm i$ величина $|\varepsilon|=1$, при этом эллипс превращается в окружность. Если же $\mathrm{Im}\nu=0$, то эллипс превращается в прямую линию, т. е. волна обладает линейной поляризацией.

Формулы (14)—(23) полностью решают поставленную задачу и позволяют ответить на любой вопрос о поведении как отраженной, так и прошедшей через рассматриваемую систему электромагнитной волны. Определим, например, величину угла вращения плоскости поляризации прошедшей волны относительно плоскости поляризации линейно-поляризованной падающей волны. Используя (22), для отношения составляющих вектора $\vec{E}_t$ в системе координат x', y', z, в которой ось x' направлена вдоль плоскости поляризации падающей волны ($\vec{E}_0 \| ox'$), получим

$$\nu' = \frac{E_{ty'}}{E_{tx'}} = \frac{T_3+\nu_0(T_4-T_1)-\nu_0^2 T_2}{T_1+\nu_0(T_2+T_3)+\nu_0^2 T_4}. \tag{24}$$

Записывая правую часть этого равенства в виде $\nu'=\mathrm{Re}\,\nu'+i\,\mathrm{Im}\,\nu'$, нетрудно показать, что угол поворота ψ большой оси эллипса поляризации прошедшей волны относительно плоскости поляризации падающей волны определяется формулой

$$\mathrm{tg}\,2\psi = \frac{2\mathrm{Re}\,\nu'}{1-|\nu'|^2}. \tag{25}$$

В том частном случае, когда падающая волна поляризована в плоскости xz, содержащей оптические оси кристаллов, формулы (24), (25) и (18) дают

$$\mathrm{tg}\,2\psi_{\|} = \frac{2\mathrm{Re}(D_1 D_3^*)}{|D_1|^2-|D_3|^2}. \tag{26}$$

Если же падающая волна поляризована в направлении, перпендикулярном плоскости xz, то аналогичным образом получим

$$\mathrm{tg}\,2\psi_{\perp} = \frac{2\mathrm{Re}(D_4 D_2^*)}{|D_2|^2-|D_4|^2}. \tag{27}$$

Поскольку правые части (26) и (27) являются функциями параметров d_1 и d_2, то очевидно, что измеряя опытным путем углы $\psi_{\|}$ и $\psi_{\perp}$ и используя эти формулы, можно с высокой точностью определить толщину обеих пластин, образующих рассматриваемую систему. Кроме того, при известных значениях d_1 и d_2 эти формулы могут быть использованы для определения углов φ_1 и φ_2, характеризующих ориентацию оптических осей кристаллов. Указанный бесконтактный способ определения параметров имеет особо важное значение в случаях тонких пленок, широко используемых в современном приборостроении с целью создания миниатюрных твердотельных оптических приборов.

Автор признателен академику АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяну за ценное обсуждение.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ԹԱՐԽԱՆՅԱՆ

Գիրոտրոպ բյուրեղներում էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման տեսության վերաբերյալ

Աշխատանքում հետազոտված են էլեկտրամագնիսական ալիքների տարածման առանձնահատկությունները երկու էնանտիոմորֆ օպտիկապես ակտիվ անիզոտրոպ բյուրեղներից կազմված սիստեմում։ Դիտարկված են կամայական հաստության և օպտիկական առանցքների կամայական կողմնորոշում ունեցող բյուրեղներ։ Ստացված են ընդհանուր բանաձևեր լույսի անդրադարձման և անցման գործակիցների, ինչպես նաև բևեռացման հարթության պտտման անկյան համար։

Առաջարկված է ոչ կոնտակտային մեթոդ գիրոտրոպ բյուրեղներից կազմված թաղանթների հաստության և նրանց օպտիկական առանցքների ուղղության որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И. Агранович, В. Л. Гинзбург,* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, Наука, М., 1979. [2] *В. А. Кизель, В. И. Бурков,* Гиротропия кристаллов, Наука, М., 1980. [3] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Электродинамика сплошных сред, § 83, ГИФМЛ, М., 1959. [4] *В. Н. Александров,* Кристаллография, т. 15, 996 (1970). [5] *Ф. И. Федоров,* Теория гиротропии, Наука и техника, Минск, 1975 [6] *H. Nakano, H. Kitmura,* J. Phys. Soc. Japan, vol. 27, 519 (1969). [7] *К. Шефер,* Теоретическая физика, т. 3, ч. 2, ГОНТИ, 1938. [8] *Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков,* ЖЭТФ, т. 61, 1808 (1971). [9] *А. Г. Иосифьян,* ДАН АрмССР, т. 51, 21 (1970). [10] *А. Г. Иосифьян,* ДАН АрмССР, т. 55, 98 (1972). [11] *Р. Г. Тарханян,* ДАН АрмССР, т. 53, 156 (1972). [12] *А. М. Сидорович,* Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 4119—79—ДСП (1979). [13] *М. Борн, Э. Вольф,* Основы оптики, Наука, М., 1970.