ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 5

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

Т. Н. Арутюнян

Обратная задача для системы Дирака на полуоси с дискретным спектром

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 3/III 1982)

Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений Дирака

$$ly = \left\{\alpha_1 \frac{1}{i}\frac{d}{dr} + \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r)\right\} y = \lambda y, \quad 0 \leq r < \infty, \tag{1}$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$p(r)$ и $q(r)$—действительные, локально интегрируемые функции, обеспечивающие дискретность спектров* краевых задач

$$ly = \lambda y, \quad y_1(0, \lambda) = 0 \tag{2}$$

и

$$ly = \lambda y, \quad y_2(0, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Известно ([1]), что операторы, порожденные задачами (2) и (3) в пространстве вектор-функций $L_2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$, существенно самосопряженные. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ есть спектры соответственно задач (2) и (3). Через $\varphi(r, \lambda)$ и $\theta(r, \lambda)$ обозначим решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \quad \varphi_2(0, \lambda) = -1, \tag{4}$$

$$\theta_1(0, \lambda) = 1, \quad \theta_2(0, \lambda) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, что $\varphi(r, \lambda_n)$ и $\theta(r, \mu_n)$—собственные вектор-функции соответственно задач (2) и (3). Квадраты норм этих собственных функций обычно называют нормировочными постоянными. Монотонно возрастающие функции

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0 < \lambda_k < \lambda} \dfrac{1}{a_k} \\ -\sum\limits_{\lambda < \lambda_k < 0} \dfrac{1}{a_k} \end{cases} \quad \text{и} \quad \sigma(\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{0 < \mu_k < \lambda} \dfrac{1}{b_k} \\ -\sum\limits_{\lambda < \mu_k < 0} \dfrac{1}{b_k} \end{cases}$$

называются спектральными функциями задач (2) и (3) соответственно.

В работе ([2]) доказано, что по спектральной функции $\rho(\lambda)$ можно однозначно восстановить потенциал $Q(r) = \alpha_2 p(r) + \alpha_3 q(r)$ канонической

*Достаточные условия дискретности спектра задач (2) и (3) приведены в ([1]).

системы Дирака, т. е. решена так называемая обратная задача по спектральной функции.

Мы докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $p(r)$ и $q(r)$ удовлетворяют условиям:*

$$0<p(0)\leqslant p(r)\leqslant Ce^{\alpha r},\ \alpha>0,\ p(r_1)\leqslant p(r_2) \text{ при } r_1<r_2, \tag{а}$$

$$0\leqslant q(r_1)\leqslant q(r_2) \text{ при } r_1<r_2. \tag{б}$$

Тогда

$$a_n=\frac{1}{\lambda_n-\mu_n}\prod_{\substack{k\neq n\\ k\in Z}}\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\mu_k-\lambda_n}, \tag{6}$$

т. е. $\rho(\lambda)$ (а следовательно и $Q(r)$) определяется однозначно по двум спектрам.

Аналогичная теорема для уравнения Штурма—Лиувилля на $[0, \infty)$ доказана в ([3]), а для канонической системы Дирака на $[0, \pi]$ — в ([4]).

Теорема 2. *Пусть $p(r)$ удовлетворяет условию (а), а $q(r)\equiv\equiv 0$. Тогда $\mu_k=-\lambda_{-k}$ и*

$$a_n=\frac{1}{\lambda_n+\lambda_{-n}}\prod_{\substack{k\neq n\\ k\in Z}}\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n+\lambda_{-k}}=\frac{1}{\mu_n+\mu_{-n}}\prod_{\substack{k\neq n\\ k\in Z}}\frac{\mu_{-k}-\mu_{-n}}{\mu_k+\mu_{-n}},$$

т. е. $\rho(\lambda)$ (а следовательно и $Q(r)$) восстанавливается однозначно по одному спектру (как по $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$, так и по $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$).

Более или менее близкий аналог этой теоремы для уравнения Штурма—Лиувилля на $[0, \infty)$ автору неизвестен.

Если через $u_n(r)$ и $v_n(r)$ обозначить нормированные собственные вектор-функции соответственно задач (2) и (3), то, очевидно,

$$|u_n(0)|^2=u_{n_1}^2(0)+u_{n_2}^2(0)=u_{n_2}^2(0)=\frac{1}{a_n}, \tag{7}$$

$$|v_n(0)|^2=v_{n_1}^2(0)+v_{n_2}^2(0)=v_{n_1}^2(0)=\frac{1}{b_n}. \tag{8}$$

Из этих соотношений видно, что задание значений $\{|u_n(0)|^2\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ эквивалентно заданию спектральной функции $\rho(\lambda)$ и, следовательно, по этим двум последовательностям однозначно восстанавливается $Q(r)$. Можно ли однозначно восстановить $Q(r)$ по $\{|v_n(0)|^2\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$, т. е. по спектральной функции $\sigma(\lambda)$? Положительный ответ на этот вопрос дается равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(\mu)}{\mu-\lambda}=-\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\mu)}{\mu-\lambda}\right)^{-1}, \tag{9}$$

из которого видно, что, зная $\sigma(\lambda)$, мы можем, обратив интеграл Стильтьеса, однозначно определить $\rho(\lambda)$, так как асимптотика $\rho(\lambda)$ при $\lambda\to\pm\infty$ известна (см., например, ([5,6])). Т. е. верна

Теорема 3. *При условиях (а) и (б) потенциальная матрица*

$Q(r)$ однозначно восстанавливается по спектру и значениям в нуле нормированных собственных функций задачи (3).

Возможно, эта теорема представляет интерес потому, что значения „волновой функции" в нуле, как и спектр, есть „наблюдаемая" физическая величина (см., например, ([7–9])).

Наметим коротко доказательства приведенных теорем. Обозначим через

$$u(r, \lambda)=c_1(\lambda)\varphi(r, \lambda)+c_2(\lambda)\theta(r, \lambda)$$

решение уравнения (1), принадлежащее $L_2(0, \infty; \mathbf{C}^2)$ при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ (существование такого решения следует из теоремы 2.1, ([1]), с. 232, аналогичной известной теореме Г. Вейля для уравнения Штурма—Лиувилля). Из (4) и (5) следует, что $c_1(\lambda)=-u_2(0, \lambda)$, $c_2(\lambda)=u_1(0, \lambda)$, поэтому запишем

$$u(r, \lambda)=-u_2(0, \lambda)\varphi(r, \lambda)+u_1(0, \lambda)\theta(r, \lambda)$$

и рассмотрим функцию

$$R(\lambda)=\frac{u_1(0, \lambda)}{u_2(0, \lambda)}.$$

Очевидно, что нули функции $R(\lambda)$ образуют спектр $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ задачи (2), а „полюсы" — спектр $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ задачи (3). Так как обе задачи самосопряженные и имеют чисто дискретный спектр, то $R(\lambda)$—мероморфная функция. При этом из легко устанавливаемого соотношения

$$\operatorname{Im}R(\lambda)=\operatorname{Im}\lambda\frac{\int\limits_0^\infty|u(r, \lambda)|^2dr}{|u_2(0, \lambda)|^2}$$

следует, что $R(\lambda)$ „вещественная" (т. е. $\operatorname{Im}R(\lambda)=0$ при $\operatorname{Im}\lambda=0$) и переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, для нее имеют место известные представления ([10])

$$R(\lambda)=a\lambda+b+\sum_{k\in Z}A_k\left(\frac{1}{\mu_k-\lambda}-\frac{1}{\mu_k}\right), \tag{10}$$

где $a\geqslant 0$, $\operatorname{Im}b=0$, $A_k\geqslant 0$; и

$$R(\lambda)=c\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda-\mu_0}\prod_{k\in Z}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)^{-1}, \tag{11}$$

где $c>0$, а штрих при бесконечном произведении означает, что пропускается множитель с номером $k=0$. Кроме того, нули и полюса $R(\lambda)$ все простые и перемежаются, причем

$$\mu_k<\lambda_k<\mu_{k+1},\ k\in\mathbf{Z},\ \lambda_{-1}<0<\mu_1$$

(мы будем предполагать, что $\lambda_0\neq 0$, $\mu_0\neq 0$).

Рассмотрим также функцию

$$-\frac{1}{R(\lambda)}=-\frac{u_2(0, \lambda)}{u_1(0, \lambda)},$$

которая как и $R(\lambda)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, допускает представления

$$-\frac{1}{R(\lambda)}=a'\lambda+b'+\sum_{k\in Z}A'_k\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}-\frac{1}{\lambda_k}\right), \tag{12}$$

где $a'\geqslant 0$, $\operatorname{Im} b'=0$, $A'_k\geqslant 0$; и

$$-\frac{1}{R(\lambda)}=c'\frac{\lambda-\mu_1}{\lambda-\lambda_0}\prod_{k\in Z}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\mu_{k+1}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1}, \tag{13}$$

где $c'>0$. В дальнейшем важную роль играет

Лемма 1. *При условиях (а) и (б) имеют место предельные соотношения для действительной и мнимой частей функции $R(\lambda)$ при $\lambda=i\mu$*

$$\lim_{\mu\to\infty}\operatorname{Re}\{R(i\mu)\}=0,\quad \lim_{\mu\to\infty}\operatorname{Im}\{R(i\mu)\}=1.$$

В частности, $\lim\limits_{\mu\to\infty}|R(i\mu)|=1$.

Используя лемму 1, представления (11) и (13), а также соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}R(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}=\frac{\|u(r,\ \lambda_n)\|^2}{u_2^2(0,\ \lambda_n)}=a_n,\\
&\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{1}{R(\lambda)}\right)\Bigg|_{\lambda=\mu_n}=\frac{\|u(r,\ \mu_n)\|^2}{u_1^2(0,\ \mu_n)}=b_n,
\end{aligned} \tag{14}$$

получаем равенства (6) и

$$b_n=\frac{1}{\mu_n-\lambda_{n-1}}\prod_{\substack{k\in Z\\ k\neq n-1}}\frac{\mu_{k+1}-\mu_n}{\lambda_k-\mu_n}.$$

Так доказывается теорема 1.

Для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что $\mu_k=-\lambda_{-k}$ при $q(r)\equiv 0$. Это легко устанавливается из свойств матриц α_k.

Для доказательства теоремы 3 при помощи леммы 1 получаем, что числа a и a', участвующие в представлениях (10) и (12), равны нулю, числа b и b' допускают представления

$$b=\sum_{k\in Z}\frac{A_k}{\mu_k},\qquad b'=\sum_{k\in Z}\frac{A'_k}{\lambda_k},$$

а A_k и A'_k, как легко видеть, есть вычеты

$$A_k=-\operatorname{Res}R(\lambda)|_{\lambda=\mu_k}=\frac{u_1^2(0,\ \mu_k)}{\|u(r,\ \mu_k)\|^2}=\frac{1}{b_k},$$

$$A'_k=-\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{R(\lambda)}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_k}=\frac{u_2^2(0,\ \lambda_k)}{\|u(r,\ \lambda_k)\|^2}=\frac{1}{a_k}.$$

Используя эти замечания, представления (10) и (12) и определения спектральных функций $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$, получим представления

$$R(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\mu)}{\mu - \lambda}, \qquad -\frac{1}{R(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

откуда следует соотношение (9), что и доказывает теорему 3.

Автор выражает признательность Б. М. Левитану за внимание при обсуждении результатов данной работы.

Ереванский государственный университет

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Հակադարձ խնդիր կիսառանցքի վրա դիսկրետ սպեկտրով Դիրակի համակարգի համար

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ (1) Դիրակի կանոնիկ համակարգի պոտենցիալ մատրիցը, a) և б) պայմանների դեպքում, կարելի է միարժեք վերականգնել (2) և (3) եզրային խնդիրների սպեկտրների միջոցով (թեորեմ 1)։ Մի մասնավոր դեպքում նա կարելի է վերականգնել միայն մի սպեկտրի միջոցով (թեորեմ 2) և, բացի դրանից, պոտենցիալը կարելի է միարժեք վերականգնել (3) եզրային խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիայի միջոցով (թեորեմ 3)։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*, Введение в спектральную теорию. Наука, М., 1970. [2] *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*, ДАН СССР, т. 167, № 5 (1965). [3] *Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов*, УМН, т. 19, вып. 2 (1964). [4] *М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев*, ДАН АзССР, т. 22, № 7 (1966). [5] *И. С. Саргсян*, ДАН СССР, т. 166, № 5 (1966). [6] *В. А. Яврян*, ДАН АрмССР, т. 56, № 3 (1973). [7] *C. Quigg, J. L. Rosner*, Fermilab- Pub. —77/106 —THY, 1977. [8] *H. B. Thacker, C. Quigg, J. L. Rosner*, Phys. Rev., D 18 (1978). [9] *H. Grosse, A. Martin*, Nuclear Physics, B 148 (1979). [10] *Б. Я. Левин*, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.