ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 4

УДК 517. 5

МАТЕМАТИКА

Г. У. Матевосян

О дефектных значениях голоморфных в кольце функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 16/IV 1982)

После основополагающих работ Р. Неванлинны ([1]) о распределении значений мероморфных в круге и плоскости функций аналогичные вопросы для многосвязных областей стали предметом многочисленных исследований ([2]). Автором ([3]) были получены некоторые аналоги двух основных теорем Р. Неванлинны для случая кругового кольца и на их основе — соответствующие аналоги соотношения дефектов Р. Неванлинны. В настоящей статье обсуждается вопрос о точности полученных в ([3]) соотношений дефектов.

Отметим, что вопрос о точности соотношения дефектов Р. Неванлинны обсуждался в его работе ([4]), а также в работе Л. Альфорса ([5]). Далее, А. А. Гольдберг ([6,7]) построил мероморфные функции любого порядка с наперед заданным счетным множеством дефектных значений.

В. Фукс и У. Хейман ([8]) построили целые функции бесконечного порядка с наперед заданным счетным множеством дефектных значений и величин дефектов. Вопрос о дефектах целых функций конечного порядка исследовался Эдреем и В. Фуксом ([8]), Н. У. Аракеляном ([9,10]) и др.

В настоящей статье некоторые из этих результатов распространяются на функции f, голоморфные в кольце

$$K_{R_1,R_2}=\{R_1<|z|<R_2\},\quad 0\leqslant R_1<R_2\leqslant+\infty\ \ (f\in A(K_{R_1,R_2})).$$

Для удобства изложения перечислим введенные в ([3]) основные понятия для f.

1. Характеристическая функция

$$T(r,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

2. Дефект слева и справа в точке $a\in\mathbf{C}$:

$$\delta_\wedge(f,a)=\varliminf_{r\to R_1^+}\frac{m\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)},\tag{1}$$

$$\delta_{\Pi}(f, a)=\varliminf_{r\to R_2^-} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}.$$

3. Порядок слева и справа

$$\lambda_{\Lambda}(f)=\varlimsup_{r\to R_1^+} \frac{\log T(r, f)}{\log \mu(r)},$$

$$\lambda_{\Pi}(f)=\varlimsup_{r\to R_2^-} \frac{\log T(r, f)}{\log \mu(r)},$$

где

$$\mu(r)=\begin{cases} |R_1-r|^{-1} \text{ при } R_1<r<r_0, \\ |R_2-r|^{-1} \text{ при } r_0<r<R_2,\ R_2<+\infty, \\ \quad r \quad \text{при } r_0<r<+\infty,\ R_2=+\infty, \end{cases}$$

r_0—фиксированное число $R_1<r_0<R_2$.

В ([3]) доказано, что при

$$\lim_{r\to R_j} \frac{T(r, f)}{\log\mu(r)}=\infty, \quad j=1, 2$$

для каждого $a\in\mathbf{C}$, исключая самое большое счетное множество точек a, $\delta_{\Lambda}(f, a)=\delta_{\Pi}(f, a)=0$; при этом

$$\sum_{a\in C} \delta_{\Lambda}(f, a)\leqslant 1, \quad \sum_{a\in C} \delta_{\Pi}(f, a)\leqslant 1. \tag{2}$$

Речь идет, таким образом, о точности соотношений (2). Полный ответ на этот вопрос дает нижеследующая теорема 1, в доказательстве которой мы используем, с некоторыми модификациями, метод, предложенный В. Фуксом и У. Хейманом ([8]).

Теорема 1. *Пусть $(a_\nu)_1^N$ и $(b_\mu)_1^{N_1}$—произвольные последовательности комплексных чисел, а $(\delta_\nu)_1^N$ и $(\delta_\mu^*)_1^{N_1}$—положительных чисел (N, $N_1\leqslant+\infty$), удовлетворяющие условию*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu\leqslant 1, \quad \sum_{\mu=1}^{N_1} \delta_\mu^*\leqslant 1.$$

Тогда существует голоморфная в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функция F такая, что

$$\delta_{\Pi}(F, a_\nu)=\delta_\nu, \quad \nu=1, 2, \ldots, N,$$

$$\delta_{\Lambda}(F, b_\mu)=\delta_\mu^*, \quad \mu=1, 2, \ldots, N_1,$$

f не имеет дефектных значений, отличных от a_ν и b_μ,

$$1\leqslant\nu\leqslant N_1, \quad 1\leqslant\mu\leqslant N_1.$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$A_k=\{z=x+iy|x>1; \quad (2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi\},$$

L_k—отрицательно ориентированная граница области A_k, $k=0, \pm1, \ldots$ Тогда интеграл типа Коши

$$I_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta,$$

где $\varphi(\zeta)=\zeta^{-1}\exp\{e^{\zeta}+e^{\zeta^{-1}}\}$
голоморфна в $\mathbf{C}\setminus L_n$ и легко убедиться, что

$$I_n(z)=O(z^{-1}) \text{ при } z\to\infty.$$

$I_n(z)$ определяет голоморфную вне A_n функцию $E_n(z)$. Последняя допускает голоморфное продолжение на A_n, определяемое формулой

$$E_n(z)=\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Таким образом, $E_n(z)$ является целой функцией.

При подходящем выборе чисел d_n и e_n функция

$$f(z)=\varphi^{-1}(z)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(d_n+e_n)E_n(z)$$

будет голоморфной в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ и при $z=x+iy\to\infty$, $(2m-1)\pi<y<(2m+1)\pi$, имеет вид

$$f(z)=d_m+e_m z+O(1+|z|^3)\varphi^{-1}(z).$$

Кроме того,

$$T(r,\ f)\leqslant e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}}\{1+O(1)\}, \tag{3}$$

$$m(r,\ (f-a_\nu)^{-1})\geqslant\{\delta_\nu+O(1)\}e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}},\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{4}$$

$$m(r,\ (f(z)-z)^{-1})\geqslant\{\delta_0+O(1)\}e^r(2\pi^3 r)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

при $|z|=r\to\infty$.

Из (3), (4), (5), с учетом определения (1) и соотношения дефектов (2), получим, что

$$\delta_{\Pi}(a_n,\ f)=\delta_\nu,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

При этом f не имеет отличных от a_ν дефектных значений справа.

Для получения нужной нам функции аналогично построим также функцию $f^*(z)$, имеющую дефекты справа в точках b_μ (и только в них) с величиной дефекта δ_μ^*, $\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1$. Тогда голоморфная в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функция

$$F(z)=f(z)+f^*(z^{-1})$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Полагая в теореме 1 $\delta_1=\delta_1^*=1$, мы получим:

Следствие. Для произвольных $a,\ b\in\mathbf{C}$ существует голоморфная в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функция f, для которой $\delta_{\Pi}(a,\ f)=1$, $\delta_{\Lambda}(b,\ f)=1$, т. е. значения a, b дефектные с максимальной величиной дефекта.

Это утверждение можно усилить. Именно, можно построить голоморфную в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функцию f первого (левого и правого) порядка, для которой значение a является пикаровским исключительным вблизи точки $z=0$, а значение b — вблизи $z=\infty$.

Для построения упомянутого примера положим

$$\varphi(z)=\exp\{z+z^{-1}\}$$

и рассмотрим интеграл

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}\,d\zeta,$$

где L—положительно ориентированная окружность $|z|=1$.

$I(z)$, как интеграл типа Коши, определяет голоморфную в $|z|<1$ функцию $I_2(z)$, а в $|z|>1$—функцию $I_1(z)$, при этом

$$I_2(z)-I_1(z)=z^{-1}\varphi(z),$$

когда $z\in L$.

Теперь, если аналитически продолжить $I_2(z)$ из круга $|z|<1$ в его внешность, то учитывая, что

$$I_2(z)=I_1(z)+\varphi(z)z^{-1},\quad |z|\geqslant 1,$$

и обозначив

$$f(z)=zI_2(z)\varphi^{-1}(z)=\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\,\frac{dz}{\zeta(\zeta-2)}+\psi(z),$$

где

$$\psi(z)=\begin{cases}1 \text{ при } |z|\geqslant 1,\\ 0 \text{ при } |z|<1,\end{cases}$$

получим голоморфную в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функцию, имеющую нужное нам свойство. В самом деле, I_2—целая функция, и по теореме о вычетах имеем

$$I_2(0)=\sum_{k=1}^{+\infty}[k!(k-1)!]^{-1}\neq 0.$$

Следовательно, $f(z)\neq 0$ в некоторой окрестности нуля.

Когда $|z|>1$, то

$$f(z)=zI_2(z)\varphi^{-1}(z)+1,$$

при этом

$$\lim_{z\to\infty} zI_2(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}[k!(k+2)!]^{-1}\neq 0.$$

Следовательно, $f(z)\neq 1$ в некоторой окрестности точки $z=\infty$.

Представляет интерес построение мероморфной в $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ функции f с существенно особыми точками $z=0$ и $z=\infty$, для которой значения a_1 и a_2 являются пикаровскими исключительными в окрестности $z=0$, а b_1 и b_2—в окрестности $z=\infty$.

Переходя к функциям конечного порядка, отметим, что голоморфная в K_{R_1,R_2} функция левого (правого) порядка $0\leqslant\rho_\Lambda\leqslant\dfrac{1}{2}$ $\left(0\leqslant\rho_\Pi\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ не может иметь конечные дефектные значения слева (справа). Это можно вывести из теоремы Эдрея и Фукса ([8]) о целых функциях, если воспользоваться теоремой 1 работы автора ([3]) о факторизации функций, голоморфных (мероморфных) в круговом кольце.

Проблема количества дефектных значений целых функций конечного порядка исследована Н. У. Аракеляном ([9,10]).

Для любого $\rho > \frac{1}{2}$ он построил целую функцию порядка ρ нормального типа, множество дефектных значений которой содержит любое наперед заданное счетное множество комплексных чисел.

В случае круга был построен ([10]) аналогичный пример голоморфной функции любого порядка $\rho > 0$.

Для формулировки аналогичного результата для кругового кольца положим сначала

$$c_\Lambda = \begin{cases} 0 \text{ при } R_1 > 0, \\ \frac{1}{2} \text{ при } R_1 = 0, \end{cases} \qquad c_\Pi = \begin{cases} 0 \text{ при } R_2 < +\infty, \\ \frac{1}{2} \text{ при } R_2 = +\infty. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для произвольных чисел* $\rho_\Lambda > c_\Lambda$, $\rho_\Pi > c_\Pi$ *и последовательностей комплексных чисел* $(a_n)_1^\infty$, $(b_m)_1^\infty$ *существует голоморфная функция* f *левого порядка* ρ_Λ, *правого порядка* ρ_Π *соответственно, нормального типа такая, что*

$$\delta_\Pi(f, a_n) > 0, \; n = 1, 2, \ldots,$$
$$\delta_\Lambda(f, b_m) > 0, \; m = 1, 2, \ldots$$

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Հ. Հ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Օղակում հոլոմորֆ ֆունկցիայի դեֆեկտային արժեքների մասին

Հեղինակը ([3])-ում ապացուցել էր, որ օղակում մերոմորֆ ֆունկցիան կարող է ունենալ հաշվելի թվով աջակողմյան (ձախակողմյան) դեֆեկտային արժեքներ։ Ընդ որում, աջակողմյան (ձախակողմյան) դեֆեկտների գումարը չի գերազանցում 2 թվին։

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է՝

1. $C/\{0\}$-ում անալիտիկ ֆունկցիայի գոյությունը, որի համար տրված վերջավոր կամ հաշվելի արժեքները դեֆեկտային են աջից (ձախից) և ունեն նախօրոք տրված մեծության դեֆեկտներ։

2. $C/\{0\}$-ում անալիտիկ ֆունկցիայի գոյությունը, որը ունի աջակողմյան (ձախակողմյան) $\rho > \frac{1}{2}$ կարգ և նախօրոք տրված դեֆեկտային արժեքներ։

Չվերածվող օղակում անալիտիկ ֆունկցիայի համար վերջին պնդումը ճիշտ է կամայական $\rho > 0$ դեպքում։

3. Կառուցվում է օղակում անալիտիկ ֆունկցիա, որի համար տրված երկու վերջավոր արժեքները պիկարյան բացառիկ են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941. [2] *L. Sario, K. Noshiro*, Value distribution theory, Princeton (N. Y.) Van Nostrand, 1966. [3] *Г. У. Матевосян*, Изв. АН АрмССР, мат. т. 9, № 5 (1974). [4] *R. Nevanlinna*, Acta Math., 58, 295—373 (1932). [5] *L. Ahlfors*, Acta Math., 58, 375—406 (1932). [6] *А. А. Гольдберг*, Укр. мат. журн., 11, 438—443 (1959). [7] *А. А. Гольдберг*, ДАН СССР, т. 98, (1954). [8] *У. Хейтман*, Мероморфные функции, М., 1966. [9] *Н. У. Аракелян*, ДАН СССР, т. 170, № 5 (1966). [10] *Н. У. Аракелян*, Изв. АН АрмССР, мат., т. 5, № 6 (1970).