ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 4

УДК 519.234

МАТЕМАТИКА

Д. Г. Асатрян, И. А. Сафарян

Непараметрическое оценивание момента «разладки» случайной последовательности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 30/III 1982)

В связи с некоторыми приложениями возникает задача оценивания неизвестного момента изменения свойств случайной последовательности. Такая задача известна под названием задачи о „разладке". Различные ее параметрические постановки сформулированы в ([1]).

В непараметрической постановке задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть $x_1, \ldots, x_N$ последовательность независимых наблюдений и первые n_0 наблюдений имеют непрерывную функцию распределения $F(x)$, а последующие $N-n_0$ наблюдений — непрерывную функцию распределения $G(x)\neq F(x)$, причем предполагается, что $\Delta N\leqslant n_0<(1-\Delta)N$ $(0<\Delta<1/2,\ N>2)$. Требуется по результатам всех наблюдений найти оценку $\tilde{n}$ неизвестного момента „разладки" n_0, состоятельную в определенном смысле.

Для решения задачи о „разладке" в ([2]) к последовательности пар выборок $x_1, \ldots, x_n$ и $x_{n+1}, \ldots, x_N$ $(n=[\Delta N], \ldots, [(1-\Delta)N])$ применяется двухвыборочная статистика Манна — Уитни $V_n(n)$. Оценка $\tilde{n}$, определяемая из условия минимума статистики по множеству значений n, оказывается состоятельной.

В настоящей работе указанная задача решается с применением двухвыборочных ранговых статистик общего вида

$$T_N(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}J_N\left(\frac{R_i}{N}\right),\quad n=[\Delta N], \ldots, [(1-\Delta)N], \tag{1}$$

где R_i—ранг i-го наблюдения в выборке $x_1, \ldots, x_N$, а функция меток $J_N(u)$ определена одним из следующих двух способов:

$$J_N\left(\frac{i}{N}\right)=J(\mathscr{E}U_{(i)N})=J\left(\frac{i}{N+1}\right), \tag{2}$$

$$J_N\left(\frac{i}{N}\right)=\mathscr{E}J(U_{(i)N}). \tag{3}$$

Через $U_{(i)N}$ обозначена i-ая порядковая статистика выборки объема N из равномерного на $[0, 1]$ распределения.

Относительно $J(u)$ предположим, что она удовлетворяет следующему условию теоремы Чернова—Сэвиджа ([3]):

$$|J^{(i)}(u)|\leqslant K\{u(1-u)\}^{-i-\alpha},\quad i=0,\ 1,\ 2 \tag{4}$$

для некоторого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$.

Введем следующие обозначения:

$$W_N(n) = \frac{N}{N-n}(T_N(n) - A),$$

$$\omega_N(n) = \frac{N}{N-n}(A_N(n) - A), \tag{5}$$

где

$$A = \int_0^1 J(u)du,$$

$$A_N(n) = \int_{-\infty}^{\infty} J(H(x))dF^*(x),$$

$$H(x) = \frac{n_0}{N}F(x) + \frac{N-n_0}{N}G(x), \tag{6}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x), & n \leqslant n_0 \\ \frac{n_0}{n}F(x) + \frac{n-n_0}{n}G(x), & n > n_0. \end{cases}$$

Заметим, что из (4) следует

$$|A| < \infty.$$

Рассмотрим оценку момента „разладки" в случае, когда для некоторой $J(u)$, удовлетворяющей (4) функции распределений, $F(x)$ и $G(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} J[\gamma F(x) + (1-\gamma)G(x)]dF(x) < A \tag{7}$$

для любых $0 < \gamma < 1$. Очевидно, что при $F(x) \equiv G(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J[\gamma F(x) + (1-\gamma)G(x)]dF(x) \equiv A.$$

Множество пар (F, G), удовлетворяющих (7), обозначим $\mathcal{F}_J^-$.

Подставляя (6) в (5), можно показать, что

$$\omega_N(n) = \begin{cases} \frac{N}{N-n}(A_N(n_0) - A), & n \leqslant n_0 \\ \frac{N}{n}\,\frac{n_0}{N-n_0}(A_N(n_0) - A), & n > n_0, \end{cases}$$

и, следовательно, при $(F, G) \in \mathcal{F}_J^-$

$$\omega_N(n_0) = \min_{[\Delta N] \leqslant n \leqslant [(1-\Delta)N]} \omega_N(n).$$

Относительно асимптотических свойств $W_N(n)$ и $\omega_N(n)$ справедлива следующая

Лемма. *Пусть* $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{n}{N}=\lambda$, $(\Delta\leqslant\lambda\leqslant 1-\Delta)$, *тогда для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{P}\{|W_N(n)-\omega_N(n)|>\varepsilon\}=0, \tag{8}$$

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{P}\{\max_{[\Delta N]\leqslant n\leqslant[(1-\Delta)N]}|W_N(n)-\omega_N(n)|>\varepsilon\}=0. \tag{9}$$

Доказательство. Для статистик $T_N(n)$ справедливо разложение, аналогичное ([3]) в виде

$$T_N(n)=A_N(n)+B_N(n)+C_N(n),$$

где $A_N(n)$ определяется (6), а $B_N(n)$ и $C_N(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{E}B_N(n)=0,$$
$$\mathcal{D}B_N(n)=S_1/N,\ S_1<\infty,$$
$$\mathcal{P}\{|C_N(n)|>\varepsilon\}\leqslant S_2/N^{1-\varepsilon},\ S_2<\infty.$$

Кроме того, для функции меток, определенной согласно (2) или (3), при выполнении (4) можно показать справедливость следующих неравенств:

$$|\omega_N(n_1)-\omega_N(n_2)|\leqslant K_1\left|\frac{n_1-n_2}{N}\right|,$$

$$|W_N(n_1)-W_N(n_2)|\leqslant K_2\left|\frac{n_1-n_2}{N}\right|^{1-\alpha}$$

для любых $[\Delta N]\leqslant n_1,\ n_2\leqslant[(1-\Delta)N]$.

Отсюда следует доказательство (8) и (9).

Оценку $\tilde{n}$ момента „разладки" последовательности $X_1,\ldots,X_N$ определим следующим образом:

$$\tilde{n}=\min\tilde{n}':\ W_N(\tilde{n}')\leqslant W_N(n),\ [\Delta N]\leqslant n\leqslant[(1-\Delta)N]. \tag{10}$$

Теорема. *Пусть* $(F,G)\in\mathcal{F}_J^-$, *тогда оценка (10) момента „разладки" состоятельна в смысле*

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{P}\left\{\left|\frac{\tilde{n}}{N}-\frac{n_0}{N}\right|>\varepsilon\right\}=0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\xi_N(t)$ и $\eta_N(t)$ ломаные, соединяющие точки с координатами $\left(\frac{n}{N};\ W_N(n)\right)$ и $\left(\frac{n}{N};\ \omega_N(n)\right)$ соответственно.

Поскольку $\eta_N(t)$ монотонно убывает при $\Delta\leqslant t\leqslant\frac{n_0}{N}$, монотонно возрастает при $\frac{n_0}{N}\leqslant t\leqslant(1-\Delta)N$ и минимальна в точке $t_0=\frac{n_0}{N}$, то уравнение $\eta(t)=\eta_N\left(\frac{n_0}{N}\right)+\delta_\varepsilon$ имеет ровно два решения t_1 и t_2, причем $t_1<\frac{n_0}{N}<t_2$. Обозначим $n_1=[t_1N]$, $n_2=[t_2N]$, тогда можно выбрать δ_ε таким

образом, чтобы были справедливы неравенства $\left|\frac{n_0-n_1}{N}\right|<\varepsilon$ и $\left|\frac{n_0-n_2}{N}\right|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon$. В частности, при $\delta_\varepsilon=\frac{|A_N(n_0)-A|}{(1-\Delta)^2}\varepsilon$, используя (5), получим

$$\left|\frac{n_0-n_1}{N}\right|=\left|\omega_N(n_1)-\omega_N(n_0)\right|\cdot\frac{(N-n_0)(N-n_1)}{N^2|A_N(n_0)-A|}\leqslant\left|\eta_N\left(\frac{n_1}{N}\right)-\right.$$

$$\left.-\eta_N\left(\frac{n_0}{N}\right)\right|\cdot\frac{(1-\Delta)^2}{|A_N(n_0)-A|}\leqslant\delta_\varepsilon\frac{(1-\Delta)^2}{|A_N(n_0)-A|}=\varepsilon.$$

Аналогично $\left|\frac{n_0-n_2}{N}\right|\leqslant\varepsilon$.

Пусть $\mathfrak{M}$ обозначает область, ограниченную прямой $t=\eta_N\left(\frac{n_0}{N}\right)+$ $+\delta_\varepsilon$ и ломаной $\eta_N^{(1)}(t)=\eta_N(t)-\delta_\varepsilon/2$.

Тогда

$$\mathcal{P}\left\{\left|\frac{\tilde{n}}{N}-\frac{n_0}{N}\right|\leqslant\varepsilon\right\}\geqslant\mathcal{P}\left\{\frac{\tilde{n}}{N}\in\left[\frac{n_1}{N},\ \frac{n_2}{N}\right]\right\}\geqslant\mathcal{P}\left\{\left(\frac{\tilde{n}}{N},\ W_n(\tilde{n})\right)\in\right.$$

$$\left.\in\mathfrak{M}\right\}\geqslant\mathcal{P}\left\{\left|\xi_n(t)-\eta_n(t)\right|\leqslant\delta_\varepsilon/2 \text{ для всех } \Delta\leqslant t\leqslant(1-\Delta)\right\}=$$

$$=\mathcal{P}\left\{\max_{[\Delta N]\leqslant n\leqslant[(1-\Delta)N]}|W_n(n)-\omega_n(n)|\leqslant\delta_\varepsilon/2\right\}=$$

$$=1-\mathcal{P}\left\{\max_{[\Delta N]\leqslant n\leqslant[(1-\Delta)N]}|W_N(n)-\omega_N(n)|>\delta_\varepsilon/2\right\}.$$

На основании утверждения (9) леммы правая часть стремится к 1 при $N\to\infty$ и следовательно, справедливо (11).

Теорема доказана. Аналогичная теорема справедлива, когда $F(x)$ и $G(x)$ удовлетворяют неравенству, противоположному (7), если в определении (10) заменить $\tilde{n}$ на

$$\tilde{n}=\min\tilde{n}':\ W_N(\tilde{n}')\geqslant W_N(n),\quad [\Delta N]\leqslant n\leqslant[(1-\Delta)N].$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $F(x)>G(x)$. Если $J(u)$ монотонно возрастает, то $J[\gamma F+(1-\gamma)G]<J(F)$ для любого $0<\gamma<1$, следовательно $(F,G)\in\mathcal{F}_J^-$.

Таким образом, для оценки $\tilde{n}$, определяемой (10), теорема справедлива, если $T_N(n)$ основана на монотонно возрастающей функции $J(u)$. В частности, в (10) могут быть использованы статистики, основанные на степенях рангов — $J(u)=u^r$, $r>0$, статистика нормальных меток — $J(u)=\Phi_0^{-1}(u)$ (где $\Phi_0(x)$ — функция стандартного нормального распределения), статистика Сэвиджа — $J(u)=-\ln(1-u)$ и др.

Заметим, что все указанные функции меток удовлетворяют условию (4).

При $J(u)=u$ статистика $W_N(n)$ представляет собой статистику Вилкоксона, которая связана со статистикой Манна—Уитни соотношением

$$W_N(n) = V_N(n) + \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)/2.$$

Поэтому результат теоремы, доказанной в ([2]), следует из того, что $W_N(n)$ и $V_N(n)$ асимптотически совпадают.

Пример 2. Пусть $x(F(x)-G(x))>0$, $F(0)=G(0)={}^1/_2$. Частным случаем такого различия $F(x)$ и $G(x)$ является различие в масштабе. Если $T_N(n)$ основана на $J(u)=(u-{}^1/_2)^{2k}$, $k=1, 2, \ldots$, то для любого $0<\gamma<1$

$$[\gamma F(x)+(1-\gamma)G(x)-{}^1/_2]^{2k}<[F(x)-{}^1/_2]^{2k}.$$

Следовательно, $(F, G)\in\mathcal{F}_J^-$, поэтому оценка $\tilde{n}$, определяемая (10), состоятельна. При $k=1$ $J_N(u)=J\left(\frac{N}{N+1}u\right)$

$$T_N(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_i}{N+1}-\frac{1}{2}\right)^2$$

известный критерий для обнаружения различия в масштабе двух распределений — критерий Муда.

ВНИИРИ

Դ. Գ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Ա. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Պատահական հաջորդականության «ապակարգավորման» մոմենտի ոչ-պարամետրական գնահատումը

Դիտարկվում է Չեռնովի և Սևիջի՝ երկու ընտրույթանի կարգային վիճակագրությունների կիրառությամբ «ապակարգավորման» մոմենտի գնահատման խնդիրը։ Ապացուցվում է առաջարկված գնահատականի ունակայնությունը։ Բերվում են օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Ширяев,* Статистический последовательный анализ Наука, М., 1969.
[2] *Б. С. Дарховский,* Теория вероятности и ее применения, т. 21, № 1 (1976).
[3] *H. Chernoff, I. R. Savage,* Ann. Math. Statisit., vol. 29, № 4 (1958).