ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян

Об одной факторизации мероморфных функций в единичном круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 17/II 1982)

Следуя работе ([1]) М. М. Джрбашяна, обозначим через Ω класс функций $\omega(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $\omega(x)$ неотрицательна и непрерывна на интервале $[0,1)$, причем $\omega(0)=1$

$$\int_0^1 \omega(x)dx<+\infty; \qquad (1)$$

2) для любого $r(0\leqslant r<1)$

$$\int_r^1 \omega(x)dx>0. \qquad (2)$$

Далее, полагая $\omega(x)\in\Omega$, обозначим:

$$\Delta_0=1, \quad \Delta_k=k\int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx, \quad (k=1, 2, \ldots), \quad C(z, \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}. \qquad (3)$$

Функция $C(z, \omega)$ голоморфна в круге $|z|<1$, и в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то

$$C(z, \omega)=\frac{1}{(1-z)^\alpha}. \qquad (4)$$

В работе ([2]) определена функция $\Pi_\omega(z, z_k)$ следующим образом:

$$\Pi_\omega(z, z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-\tilde{U}_\omega(z, z_k)}; \quad (|z|<1, |z_k|<1), \qquad (5)$$

где $\omega(x)\in\Omega$, и

$$\tilde{U}_\omega(z, \zeta)=\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{\omega(x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{1}{\Delta_k}\int_0^{|\zeta|^2}x^{k-1}\omega(x)dx. \qquad (6)$$

Далее в работе ([2]) доказаны следующие теоремы:

Теорема А. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$, $(0<|z_k|<|z_{k+1}|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|^2}^{1}\omega(x)dx<+\infty, \tag{7}$$

где $\omega(x)$ — некоторая функция из класса Ω. Тогда бесконечное произведение $\Pi_\omega(z, z_k)$ абсолютно и равномерно сходится в каждой замкнутой части единичного круга, представляя аналитическую функцию, обращающуюся в нуль лишь на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Теорема Б. *Пусть $\Pi_\omega(z, z_k)$ — некоторое сходящее произведение. Если $\omega(x)\in\Omega$ не возрастает на $[0, 1)$, а последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty, \tag{8}$$

то имеет место представление

$$\Pi_\omega(z, z_k)=C_1B(z, z_k)\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(ze^{-i\theta}, \omega)d\psi(\theta)\right\}, \tag{9}$$

где $C_1=\sqrt{\Pi_\omega(0, z_k)}$, $\qquad S(z, \omega)=2C(z, \omega)-1$,
$B(z, z_k)$ — функция Бляшке, а $\psi(\theta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0, 2\pi]$.

Следуя идее и методу М. М. Джрбашяна, развитому в работах ([1]) и ([3]), в настоящей работе получено представление мероморфных функций в единичном круге, характеристические функции $T_F(r)$ которых подчиняются условию $\int_0^1\omega(r^2)T_F(r)dr<+\infty$, которое в специальном случае, когда $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $-1<\alpha$, совпадает с соответствующим представлением работы ([3]) (с. 28) М. М. Джрбашяна.

Лемма 1. *Пусть функция*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k \tag{10}$$

голоморфна в круге $|z|<1$ и $\omega(x)\in\Omega$. Тогда для каждого z, $|z|<1$ справедливы интегральные формулы:

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta}, \omega)\rho d\rho d\theta, \tag{11}$$

$$f(z)=-\overline{f(0)}+\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta}, \omega)Ref(\rho e^{i\theta})\rho d\rho d\theta. \tag{12}$$

Пусть функция $\varphi(z)$ голоморфна в $|z|<r$. Тогда, если запишем формулу (12) для функции $\varphi_1(w)=\varphi(rw)=\varphi(z)$ и перейдем к переменной z, получим

$$\varphi(z) = -\overline{\varphi(0)} + \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} \omega\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right) C'\left(\frac{z\rho}{r^2}e^{-i\theta},\ \omega\right) \mathrm{Re}\,\varphi(\rho e^{i\theta})\rho\, d\rho\, d\theta. \tag{13}$$

Пусть $F(z)$ — мероморфная функция в $|z|<1$ и $F(z)=c_\lambda z^\lambda+\ldots$ $(c_\lambda\neq 0)$ — ее разложение в ряд Лорана вокруг $z=0$; $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, соответственно, последовательность нулей и полюсов $F(z)$, причем:

$$0<|a_1|\leqslant\ldots\leqslant|a_n|\leqslant\ldots,\ 0<|b_1|\leqslant\ldots\ \lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}|b_n|=1.$$

Пусть $r<1$. Рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi_r(z) = z^{-\lambda}F(z)\frac{\prod\limits_{0<|b_n|\leqslant r}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)}{\prod\limits_{0<|a_n|\leqslant r}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)},\quad (|z|<r). \tag{14}$$

Записав для $\log\varphi_r(z)$ формулу (13), получаем

$$\log F(z)=\lambda\log z-\log\overline{c_\lambda}+\sum_{0<|a_n|\leqslant r}\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-U_\omega^{(r)}(z,a_n)}-$$

$$-\sum_{0<|b_n|\leqslant r}\log\left(1-\frac{z}{b_n}\right)e^{-U_\omega^{(r)}(z,b_n)}+$$

$$+\frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\omega\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right)C'\left(\frac{z\rho}{r^2}e^{-i\theta},\ \omega\right)\log|F(\rho e^{i\theta})|\rho\, d\rho\, d\theta-2\lambda\log r- \tag{15}$$

$$-\frac{\lambda}{\Delta_1}\int_0^1\omega(\rho)\log\rho\, d\rho,$$

где мы обозначали

$$U_\omega^{(r)}(z,\zeta)=\frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\omega\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right)C'\left(\frac{z\rho}{r^2}e^{-i\theta},\ \omega\right)\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\rho\, d\rho\, d\theta. \tag{16}$$

Если положить

$$U_\omega(z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta},\ \omega)\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\rho\, d\rho\, d\theta, \tag{17}$$

то будем иметь $U_\omega^{(r)}(rz,\ r\zeta)=U_\omega(z,\ \zeta)$. Заметим далее, что

$$U_\omega(z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{|\zeta|}\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta},\ \omega)\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\rho\, d\rho\, d\theta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|}^1\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta},\ \omega)\log\left|1-\frac{\zeta}{\rho e^{i\theta}}\right|\rho\, d\rho\, d\theta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|}^1\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta},\ \omega)\log\frac{|\zeta|}{\rho}\rho\, d\rho\, d\theta.$$

Заменяя функции $C'(z, \omega)$, $\log\left|1-\frac{\zeta}{\rho e^{i\theta}}\right|$ при $|\zeta|<\rho$ и $\log\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|$ при $\rho<|\zeta|$ соответствующими рядами, после интегрирования получаем

$$U_\omega(z, \zeta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\Delta_{k+1}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \frac{1}{k} \int_0^{|\zeta|^2} \omega(\rho)\rho^k d\rho - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\Delta_{k+1}} \frac{1}{k} (z\bar{\zeta})^k \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(\rho) d\rho +$$

$$+\frac{1}{\Delta_1} \int_{|\zeta|^2}^1 \log \frac{\rho}{|\zeta|^2} \omega(\rho^2) d\rho. \tag{17'}$$

Обозначив $S(\rho) = \int_\rho^1 \omega(r)dr$, из (17′) получаем

$$U_\omega(z, \zeta) = \frac{1}{\Delta_1} \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{S(\rho)}{\rho} d\rho - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\Delta_{k+1}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|^2} \rho^{k-1} S(\rho) d\rho, \tag{18}$$

откуда следует, что

$$U_\omega(z, \zeta) = \tilde{U}_{\omega_1}(z, \zeta), \tag{19}$$

где $\omega_1(x) = \frac{S(x)}{\Delta_1}$, $\Delta_1 = \int_0^1 \omega(x)dx$, а $\tilde{U}_{\omega_1}(z, \zeta)$ определяется формулой (6).

Из формулы (19) по теореме А получаем:

Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<|z_{k+1}|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|^2}^1 S(x)dx < +\infty, \tag{20}$$

где $S(x) = \int_x^1 \omega(r)dr$, $\omega(x) \in \Omega$. *Тогда бесконечное произведение*

$$\tilde{\Pi}_\omega(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right) e^{-U_\omega(z, z_k)}, \tag{21}$$

где функция $U_\omega(z, z_k)$ *определяется формулой* (17), *абсолютно и равномерно сходится в каждой замкнутой части единичного круга, представляя аналитическую функцию, обращающуюся в нуль лишь на последовательности* $\{z_k\}_1^\infty$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (20). *Тогда*

$$\lim_{r\to 1} \prod_{|z_n|<r<1} \left(1-\frac{z}{z_n}\right) e^{-U_\omega^{(r)}(z, z_n)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_n}\right) e^{-U_\omega(z, z_n)} \tag{22}$$

равномерно внутри единичного круга.

Пусть $F(z)$ — мероморфная функция в $|z|<1$. Обозначим

$$\tilde{\Pi}^{(r)}_{\omega}(z, z_k) = \prod_{0<|z_k|<r}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\{-U^{(r)}_{\omega}(z, z_k)\}, \tag{23}$$

$$\Phi^{(r)}_{\omega}(z) = \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\omega\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right)C'\left(\frac{z\rho}{r^2}e^{-i\theta}, \omega\right)\log|F(\rho e^{i\theta})|\rho d\rho d\theta, \tag{24}$$

$$K^{(r)}_{\omega} = \exp\left\{\frac{2\lambda}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\omega\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right)C'\left(\frac{z\rho}{r^2}e^{-i\theta}, \omega\right)\rho\log\frac{1}{\rho}\, d\rho d\theta\right\}. \tag{25}$$

Тогда формула (15′) принимает вид

$$F(z) = \frac{K^{(r)}_{\omega}}{\bar{C}_\lambda} z^\lambda \frac{\tilde{\Pi}^{(r)}_{\omega}(z, a_n)}{\tilde{\Pi}^{(r)}_{\omega}(z, b_n)} e^{\Phi^{(r)}_{\omega}(z)}. \tag{26}$$

Теорема 2. *Пусть $F(z)$ — любая мероморфная функция в $|z|<1$ и $\omega(x)\in\Omega$ такая, что*

$$\int_0^1 \omega(r^2)T_F(r)dr < +\infty, \tag{27}$$

где $T_F(r)$ — характеристическая функция Неванлинны функции $F(z)$ (([3], с. 19)).

Тогда $F(z)$ представима в виде

$$F(z) = \frac{K_\omega}{\bar{C}_\lambda} z^\lambda \frac{\tilde{\Pi}_\omega(z, a_n)}{\tilde{\Pi}_\omega(z, b_n)} \exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\omega(\rho^2)C'(z\rho e^{-i\theta}, \omega)\log|F(\rho e^{i\theta})|\rho d\rho d\theta\right\}, \tag{28}$$

где положено: $K_\omega = K^{(1)}_\omega$, $\tilde{\Pi}_\omega(z, z_n) = \tilde{\Pi}^{(1)}_\omega(z, z_n)$.

Доказательство. Из (33) следует $2\int_0^1 N(t)\,\omega(t^2)\,t\,dt < +\infty$,

следовательно и $N(r)\int_{r^2}^1 \omega(t)dt < \int_{r^2}^1 N(\sqrt{t})\omega(t)dt < 2\int_0^1 N(t)\omega(t^2)\,t\,dt < +\infty$,

отсюда получаем: $\lim\limits_{r\to1}\int_0^r n(t)2tS(t^2)dt < +\infty$, $\lim\limits_{r\to1} n(r)\int_{r^2}^1 S(\rho)d\rho < +\infty$, и

окончательно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{|b_n|^2}^1 S(\rho)d\rho = \lim\limits_{r\to1}\sum\limits_{|b_n|<r}\int_{|b_n|^2}^1 S(\rho)d\rho = \lim\limits_{r\to1}\left\{n(r)\int_{r^2}^1 S(\rho)d\rho +\right.$

$\left.+\int_0^r n(t)2tS(t^2)dt\right\} < +\infty.$

Аналогично получаем: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{|a_n|^2}^1 S(\rho)d\rho < +\infty$. Следовательно, согласпо теореме A бесконечные произведения $\widetilde{\Pi}_{\omega}(z, a_n)$ и $\widetilde{\Pi}_{\omega}(z, b_n)$ будут сходиться. Переходя к пределу при $r \to 1$, по лемме 2 получаем утверждение теоремы.

Из теорем Б и 2, так как $S(\rho)$ монотонно убывающая функция, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $F(z)$—любая мероморфная функция в $|z|<1$ и $\omega(x) \in \Omega$, $|z_k|_1^{\infty}$, удовлетворяет условию (8). Тогда $F(z)$ представима в виде*

$$F(z) = \frac{K_{\omega}}{c_{\lambda}} z^{\lambda} \frac{C_1}{C_2} \frac{B(z, a_n)}{B(z, b_n)} \exp\left\{\frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \omega(\rho^2) C'(z\rho e^{-i\theta}, \omega_1) \log|F(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(ze^{-i\theta}, \omega_1) d[\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)]\right\}, \tag{29}$$

где $K_{\omega} = K_{\omega}^{(1)}$, $B(z, z_k)$—произведение Бляшке, $\psi_1(\theta)$, $\psi_2(\theta)$—неубывающие ограниченные на $[0, 2\pi]$ функции, $C_1 = \sqrt{\pi_{\omega}(0, a_k)}$, $C_2 = \sqrt{\pi_{\omega}(0, b_k)}$.

Пусть $\sigma(\rho) \in \Omega$. Следуя работе ([4]), обозначим:

$$\alpha_n = \int_0^1 \sigma(\rho) \rho^{2n} d\rho, \quad n = 0, 1, 2, \qquad E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_n}. \tag{30}$$

Лемма 1′. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$ и $\sigma(\rho) \in \Omega$. Тогда для каждого z, $|z|<1$ справедливы интегральные формулы:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) E(z\rho e^{-i\theta}) \sigma(\rho) d\rho d\theta, \tag{31}$$

$$f(z) = -\overline{f}(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} E(z\rho e^{-i\theta}) Re f(\rho e^{i\theta}) \sigma(\rho) d\rho d\theta. \tag{32}$$

Пусть $\sigma(r) \in \Omega$ и

$$U_{\sigma}(z, w) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sigma(\rho) E(z\rho e^{-i\theta}) \log\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{w}\right| d\rho d\theta,$$

$$U_{\sigma}^{(r)}(rz, w) = U_{\sigma}(z, w), \ S(\rho) = \int_{\rho}^1 \sigma(r) dr. \tag{33}$$

По аналогии ([4]) получаем:

Теорема 2′. *Пусть $F(z)$—любая мероморфная функция в $|z|<1$ и $\sigma(\rho) \in \Omega$ такая, что*

$$\int_0^1 \sigma(r) T_F(r) dr < +\infty. \tag{34}$$

Тогда $F(z)$ представима в виде

$$F(z)=\frac{K_s}{c_\lambda}z^\lambda\frac{\Pi_s(z,\ a_n)}{\Pi_s(z,\ b_n)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\log|F(\rho e^{i\theta})|E(z\rho e^{-i\theta})S(\rho)d\rho d\theta\right\},\qquad(35)$$

где положено:

$$\Pi_s(z,z_k)=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-U_s(z,\,z_k)},\qquad K_s=\exp\left\{\frac{2\lambda}{\alpha_0}\int\limits_0^1\sigma(\rho)\log\frac{1}{\rho}\,d\rho\right\}.$$

Замечание. В специальном случае, когда $\sigma(\rho)$—непрерывная, монотонно убывающая функция на отрезке $[0, 1]$ и положительная в интервале $(0, 1)$, результаты (31), (32) и (35) совпадают с результатами К. М. Фишмана (([4], с. 366—369)).

В заключение автор благодарит профессора В. С. Захаряна за руководство.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Դ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների մի ֆակտորիզացիայի մասին

Հետևելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի ([1]) *և* ([3]) *աշխատանքներում զարգացված գաղափարներին և մեթոդին, ներկա հոդվածում ստացված են միավոր շըրջանում մերոմորֆ այնպիսի ֆունկցիաների ներկայացումներ, որոնց Նևանլինի* $T_F(r)$*—խարակտերիստիկ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանին,*

$$\int\limits_0^1\omega(r^2)T_F(r)dr<+\infty$$

որտեղ՝ $\omega(x)$*-ը բավարարում է որոշակի պայմանների։ Այն դեպքում, երբ* $\omega(x)=(1-x)^\alpha$, $-1<\alpha$ *կամ* $\sigma(r)\equiv\omega(r^2)$ *— որտեղ՝* $\omega(x)$ *ֆունկցիան դրական է անընդհատ և մոնոտոն նվազող* $(0,1)$*-ում, ստացված ներկայացումները համընկնում են* ([1]) *կամ* ([1]) *աշխատանքներում ստացված ներկայացումների հետ։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Мат. сборник, т. 79(121), № 4(8) (1969). [2] *Р. С. Галоян*, Изв. АН АрмССР, сер. матем., т. 7, № 5 (1972). [3] *М. М. Джрбашян*, Сообщения Института математики и механики, вып. 2, Ереван, 1948. [4] *К. М. Фишман*, ДАН СССР, т. 107, № 3 (1956).