ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 4

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Контуры любой длины в орграфах с большими полустепенями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/II 1982)

Рассматриваются конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, определяемые здесь, можно найти в [1]. Орграф с p-вершинами, содержащий контур любой длины $k\in[3, p]$, называется панциклическим и k-бирегулярным, если $\mathrm{od}(x)=\mathrm{id}(x)=k$ для любой его вершины x. В [2] доказано, что если в p-вершинном сильно связном орграфе G сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $2p-1$, то G— панциклический, кроме некоторых простых случаев. В [3] доказана панцикличность $(2n+1)$-вершинных $(n-1)$-бирегулярных направленных графов для $n\geqslant 8$. Более подробные сведения о панциклических орграфах можно найти в обзорной статье [4]. В [5] Томассен исследовал гамильтоновость p-вершинных орграфов с минимальной степенью $p-1$. В частности, получен результат, который частично описывает структуру таких сильно связных негамильтоновых орграфов, и доказано, что если в $(2n+1)$-вершинном орграфе G минимальные полустепени исхода и захода не меньше n, то G (кроме некоторых простых случаев) является гамильтоновым. В настоящей работе исследуется их панцикличность.

Пусть G—орграф. Через $V(G)$ обозначается множество вершин G, а через $E(G)$ множество его дуг. Для A, $B\subseteq V(G)$ и $x\in V(G)$ введем обозначения:

$$E(A\to B)=\{yz\in E(G)/y\in A,\ z\in B\},$$

$$O(x)=\{y\in V(G)/xy\in E(G)\},$$

$$I(x)=\{y\in V(G)/yx\in E(G)\},$$

$$E(A,\ B)=E(A\to B)\cup E(B\to A),$$

$$d(x,\ A)=|E(\{x\},\ A)|.$$

Число $d(x)=\mathrm{id}(x)+\mathrm{od}(x)$ называется степенью вершины x. Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$. Если $C\subseteq V(G)$ и $A\to B$, $B\to C$, то будем писать $A\to B\to C$. Контур длины k обозначается через $\vec{C}_k$. Если G_1—обыкновенный граф, то G_1^* означает симметрический орграф, полученный из G_1.

Следующие общеизвестные простые свойства орграфов неоднократно будут использоваться в ходе доказательств теорем 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть C контур длины m в орграфе G и $x \in V(G) \setminus V(C)$. Если $d(x, V(C)) \geqslant m+1$, то G содержит контур любой длины $r \in [2, m+1]$.*

Лемма 2. *Пусть $P: x_1 x_2 \ldots x_m$, $m \geqslant 2$, — путь в орграфе G и $x \in V(G) \setminus V(P)$. Если имеет место одно из следующих условий:*

а) $d(x, V(P)) \geqslant m+2$,

б) $d(x, V(P)) \geqslant m+1$ *и* $x x_1 \notin E(G)$ *или* $x_m x \notin E(G)$,

в) $d(x, V(P)) \geqslant m$, $x x_1 \notin E(G)$ *и* $x_m x \notin E(G)$,

то существует такое $i \in [1, m-1]$, что $x_i x x_{i+1}$ (при этом скажем, что путь $x_1 x_2 \ldots x_i x x_{i+1} \ldots x_m$ получается из P с помощью расширения вершины x).

Теорема 1. *Пусть G есть p-вершинный сильно связный негамильтоновый орграф, в котором сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше $2p-2$. Если $\vec{C}_m = x_1 x_2 \ldots x_m x_1$ длиннейший контур в G, то*

I*. *Любые две вершины из $V(G) \setminus V(\vec{C}_m)$ смежны, любая вершина $x \notin V(\vec{C}_m)$ имеет степень не больше $p-1$ и каждая сильная компонента G_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, подграфа $\langle V(G) \setminus V(\vec{C}_m) \rangle$ является полным орграфом. Более того, если орграф G 2-связный, то $\langle V(G) \setminus V(\vec{C}_m) \rangle$ является транзитивным турниром.*

II. *G содержит контур любой длины $k \in [2, m]$, кроме случая, когда $G = K^{*}_{[\frac{p}{2}], [\frac{p}{2}]+1}$.*

Приведем лишь схему доказательства теоремы 1.

Пусть $G_0 = \langle V(\vec{C}_m) \rangle$, $Q = \langle V(G) \setminus V(\vec{C}_m) \rangle$ и пусть $G_1, G_2, \ldots, G_s$ пронумерованы так, что для всех i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant s$ имеет место

$$E(V(G_j) \to V(G_i)) = \varnothing.$$

Следовательно, согласно сильной связности G имеем

$$E(V(G_0) \to V(G_1)) \neq \varnothing, \quad E(V(G_s) \to V(G_0)) \neq \varnothing. \tag{1}$$

Отсюда следует, что можно выбрать вершины $u \in V(G_{k_1})$, $v \in V(G_{k_2})$, x_σ, $x_\tau \in V(G_0)$, где $x_\sigma u$, $v x_\tau \in E(G)$, $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant s$, такие, чтобы путь $x_\sigma x_{\sigma+1} \ldots x_{\tau-1} x_\tau$ имел наименьшую возможную длину $\mu+1$ и $x_\sigma \neq x_\tau$ (при $x_\sigma = x_\tau$ справедливость теоремы очевидна). Расширим путь $x_\tau x_{\tau+1} \ldots x_\sigma$ с помощью вершин $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_{\sigma+\mu}$ насколько это возможно. В результате получим, что некоторые вершины $y_1, y_2, \ldots, y_d \in \{x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_{\sigma+\mu}\}$, $1 \leqslant d \leqslant \mu$ не находятся на расширенном пути. Далее, с помощью минимальности μ и по лемме 2 доказывается следующее утверждение:

1°. G_{k_1} и $G'_{k_1} = \langle \{x_{\sigma+1}, \ldots, x_{\sigma+\mu}\} \rangle$ являются полными орграфами;

---

* Аналогичный результат для орграфов с минимальной степенью не меньше $p-1$ получен в работе ([5]).

$\mu=d$, $k_1=k_2$; для любых вершин $y\in\{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ и $z\in V(G_{k_1})$ имеет место $d(z)\leqslant p-1$; $d(z, V(G_0))=m-\mu+1$; $d(y, V(G_0))=m+\mu-1$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{k_1-1} V(G_i)\to V(G_{k_1})\bigcup V(G'_{k_1}) \to \bigcup\limits_{i=k_1+1}^{s} V(G_i)$.

Поэтому для доказательства первой части теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда $s\geqslant 2$ и $k_1\geqslant 2$. Из (1) и 1° следует, что можно выбрать такие вершины $u_1\in V(G_{k_3})$, $v_1\in V(G_{k_4})$ и x_{σ_1}, $x_{\tau_1}\in V(G_0)$, где $1\leqslant k_3\leqslant k_1$, $k_1-1\leqslant k_4\leqslant s$, $x_{\sigma_1}u_1$, $v_1x_{\tau_1}\in E(G)$, чтобы путь $x_{\sigma_1}x_{\sigma_1+1}\ldots x_{\tau_1}$ имел наименьшую возможную длину μ_1+1. Если $G'_{k_3}=\langle\{x_{\sigma_1+1}, x_{\sigma_1+2}, \ldots, x_{\sigma_1+\mu_1}\}\rangle$, то доказывается утверждение, аналогичное утверждению 1° дл яподгра фов G_{k_3} и G'_{k_3}. Далее, подобным образом доказывается аналогичное утверждение для любых G_i и G'_i, $1\leqslant i\leqslant s$. После этого имеем часть структуры орграфа G и с ее помощью доказывается первая часть теоремы 1.

Далее, если $V|(G_i)|\geqslant 2$ или $|V(G'_i)|\geqslant 2$, $1\leqslant i\leqslant s$, то очевидно, что $\vec{C}_r\subset G$ для всех $r\in[2, m]$. Пусть $|V(G_i)|=1$ для всех $i\in[1, s]$. Тогда по первой части теоремы 1 подграф Q является транзитивным турниром. Пусть $\{x\}=V(G_1)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_k$—те вершины контура $\vec{C}_m$, которые не смежны с вершиной x и пронумерованы таким образом, что по направлению контура вершина y_i непосредственно предшествует вершине y_{i+1} (индексы вершин y_i берутся по $\mathrm{mod}(k)$). Для любой вершины y_i, $1\leqslant i\leqslant k$, обозначим через A_{2i} (соответственно A_{2i+1}) множество тех вершин контура $\vec{C}_m$, которые непосредственно предшествуют (соответственно следуют) y_i и $A_{2i}\to x$, $E(x\to A_{2i})=\varnothing$ (соответственно $x\to A_{2i+1}$, $E(A_{2i+1}\to x)=\varnothing$), и A_j, $1\leqslant j\leqslant 2k$, являются максимальными (индексы множеств A_j берутся по $\mathrm{mod}(2k)$).

Допустим, что $\vec{C}_r\not\subset G$, где $r\in[2, m-1]$. Тогда нетрудно убедиться, что для любого $i\in[1, m]$ имеет место

$$|E(x\to x_i)|+|E(x_{i+r-2}\to x)|=1. \tag{2}$$

Пусть $|A_j|=a_j$ и $a_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2k}\{a_j\}$. Для любого $l\in[1, k]$ рассмотрим следующие интервалы:

$$I_l=\left[\sum_{i=2}^{2l-1} a_i+l,\ \ \sum_{i=1}^{2l} a_i+2l\right].$$

Пользуясь соотношением (2) и максимальностью a_1, можно доказать, что $r\in\bigcup\limits_{l=1}^{k} I_l$ и для любого $q\in[1, k]$ имеет место

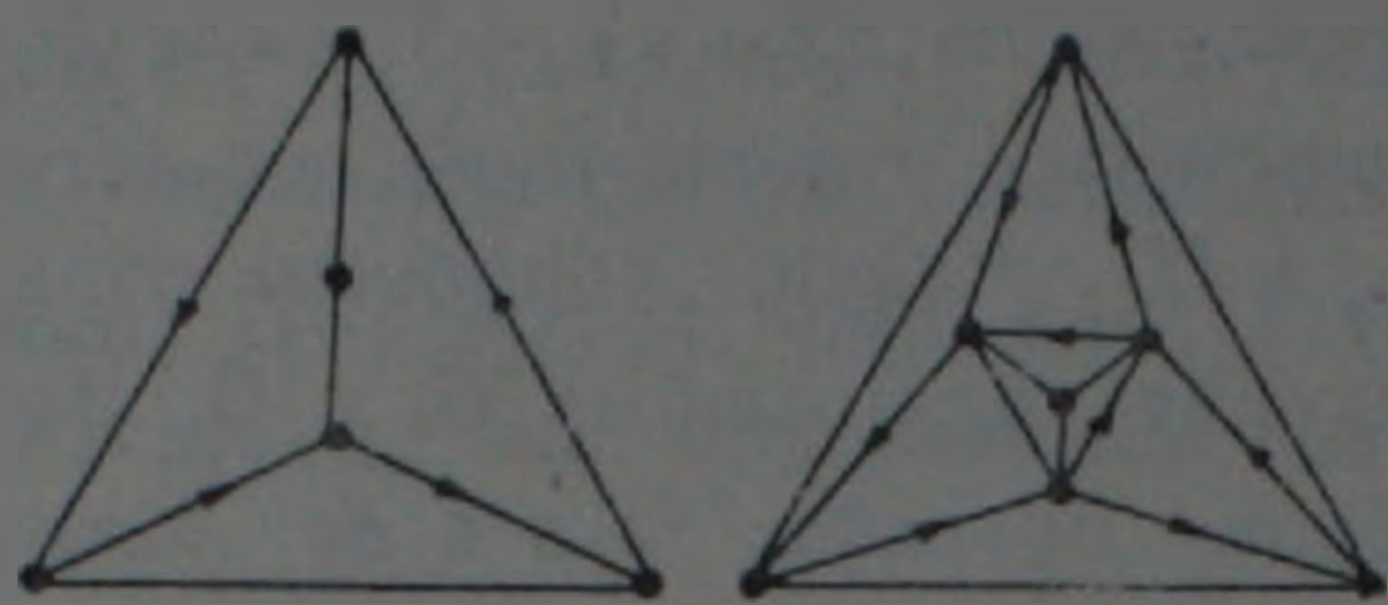
$$r=\sum_{i=2q-1}^{2q+2l-2} a_i+2l+1.$$

Отсюда с помощью полученной структуры G показывается, что если $E(\langle\{x, y_1, y_2, \ldots, y_k\}\rangle)\neq\varnothing$, то $\vec{C}_r\subset G$, а если $E(\langle\{x, y_1, y_2, \ldots, y_k\}\rangle)=\varnothing$, то $G=K^*_{[\frac{p}{2}],[\frac{p}{2}]+1}$.

Теорема 2*. *Пусть G является $(2n+1)$-вершинным орграфом с минимальной полустепенью исхода и захода $\geqslant n$. Тогда G является либо панциклическим, либо $G \in \{C_3^*, D_5, D_7, [(K_n \cup K_n)+K_1]\}^*$, либо*

$$K_{n,\,n+1}^* \subseteq G \subseteq [K_n + \overline{K}_{n+1}]^*$$

(*орграфы D_5 и D_7 изодражены рисунке*).



D_5 D_7

Набросок доказательства. Сначала доказывается, что G содержит контур любой длины $r \in [3, 5]$.

После этого доказывается, что $\vec{C}_{2n} \subset G$. Для этого рассматривается негамильтоновый максимальный контур $\vec{C}_m$ орграфа G и предполагается, что $m \leqslant 2n-1$. С помощью рассуждений, использованных при доказательстве леммы 3 в работе ([6]), доказывается, что $V(G) \setminus V(\vec{C}_m) = \{u, v\}$; uvu и $d(u) = d(v) = 2n$. Затем, рассматривая структуру G, показывается, что вершина u (v) одновременно не смежна двум соседним вершинам контура $\vec{C}_{2n}$. Следовательно, существует такое $j \in [1, m]$, что $E(u, \{x_j, x_{j+1}\}) = \varnothing$ и

$$O(u) = I(u) = \{v, x_{j+2}, x_{j+4}, \ldots, x_{j-1}\}.$$

Отсюда получим $|E(v, x_j)| = 2$ и $\vec{C}_{m+1} : x_j v u x_{j+2} \ldots x_{j-1} x_j$, что противоречит предположению максимальности m.

Пусть $\vec{C}_{2n} : x_1 x_2 \ldots x_{2n} x_1$, $x \notin V(\vec{C}_{2n})$ и пусть $\vec{C}_m \not\subset G$. Тогда очевидно, что $d(x) = 2n$ и для любого $i \in [1, 2n]$ имеет место

$$|E(x \to x_i)| + |E(x_{i+m-2} \to x)| = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1. Любая вершина контура $\vec{C}_{2n}$ смежна с вершиной x.

Обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_k$ (соответственно N_1, N_2, N_k) множество таких вершин контура $\vec{C}_{2n}$, что $x \to M_i$ (соответственно $N_i \to x$), вершины множества M_i (соответственно N_i) составляют путь по направлению контура $\vec{C}_{2n}$ и являются максимальными. Кроме того по контуру $\vec{C}_{2n}$ непосредственно M_i предшествуют N_i (всюду индексы этих множеств берутся по $\mathrm{mod}(k)$).

Пусть $n_j = |N_j|$, $m_j = |M_j|$, $1 \leqslant j \leqslant k$ и

* Томассен в работе ([5]) доказал, что при условии теоремы 2 орграф G является гамильтоновым.

$$m_1 = \max_{1\leqslant l\leqslant k}\{m_l\} \geqslant \max_{1\leqslant l\leqslant k}\{n_l\}.$$

Для любого $l\in[1, k]$ рассмотрим следующие интервалы:

$$I_l = \left[\sum_{j=1}^{l-1} n_j + \sum_{j=2}^{l} m_j + 3, \quad \sum_{j=1}^{l} (m_j + n_j) + 1\right].$$

Нетрудно убедиться, что $m \notin \bigcup_{l=1}^{k} I_l$ и для некоторого $s\in[2, k]$ имеет место

$$m = \sum_{j=l}^{l+s-2} (n_j + m_j) + 2.$$

После этого рассматриваются отдельные случаи $m_1 \geqslant 2$ и $m_1 = 1$ и показывается, что $\vec{C}_m \subset G$, а это противоречит предположению.

Случай 2. Существует вершина x_i контура $\vec{C}_{2n}$, которая не смежна с вершиной x.

Не нарушая общности, можно предполагать, что $i = 2n = p$, $x_{p-k}xx_a$, где $k\geqslant 1$, $a\geqslant 1$, $E(x, x_1) \neq \varnothing$, и

$$E(\{x_{p-k+1}, x_{p-k+2}, \ldots, x_p\} \to x) = E(x \to \{x_1, x_2, \ldots, x_{a-1}\}) = \varnothing.$$

Отсюда и из (3) следует, что $m-2 \leqslant p-k-a+1$.

Далее, по предположению $\vec{C}_m \subset G$ и лемме 2 доказывается:

2°. Для любых s, t, где $p-k-1 \leqslant s < t \leqslant p$, условие $x_s x_t \in E(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $t = s+1$.

Из этого утверждения в частности следует

$$E(\{x_p\} \to \{x_2, x_3, \ldots, x_{a+1}\}) = E(\{x_{p-k-1}, x_{p-k}, \ldots, x_{p-2}\} \to \{x_p\}) = \varnothing.$$

Пусть $P: x_{j_1} x_{j_1+1} \ldots x_{p-k-1} x_{p-k}$, где $j_1 = a$. Предположим, что существует путь $P_{l-1}: x_{j_{l-1}} x_{j_{l-1}+1} \ldots x_{j_{l-1}+m-3}$, где $l\geqslant 2$. Если $j_{l-1}+m-3 \leqslant p-k-m+2$ и существует такое $j_l \in [j_{l-1}+1, j_{l-1}+m-3]$, что $xx_{j_l} \in E(G)$ и $xx_{j_l-1} \notin E(G)$, то рассмотрим путь $P_l: x_{j_l} x_{j_l+1} \ldots x_{j_l+m-3}$ (числа j_l берутся по возможности максимальными). Пусть $(r-1)$ — максимальное количество таких путей P_l и пусть $P_r: x_{p-k-m+3}, x_{p-k-m+4}, \ldots, x_{p-k}$. Если $j_{r-1}+m-3 \geqslant p-k-m+3$, то будем говорить, что путь P покрывается путями $P_1, P_2, \ldots, P_r$, а если $j_{r-1}+m-3 < p-k-m+3$, то путь P не покрывается путями $P_1, P_2, \ldots P_r$. Заметим, что любой путь P_l, $1 \leqslant l \leqslant r$ имеет длину $m-3$.

Рассмотрим следующие подслучаи случая 2.

Случай 2.1. Путь P покрывается путями $P_1, P_2, \ldots, P_r$.

В этом случае с помощью леммы 2 доказывается, что $x_{j_1} x_p x_{p-k}$, $j_1 = k = 1$ и

$$E(\{x_p\}, \{x_{j_1+1}, x_{j_1+3}, \ldots, x_{j_r+m-4}\}) = \varnothing,$$

$$\{x_p\} \to \{x_{j_1+2}, x_{j_1+4}, \ldots, x_{j_r+m-5}\} \to \{x_p\}.$$

Отсюда следует, что m является нечетным. Значит для контура $xx_1x_2 \ldots x_{p-1}x$ имеет место подслучай 2.1. Поэтому

$$E(\{x\}, \{x_2, x_4, \ldots, x_p\}) = \varnothing,$$

$$\{x\} \to \{x_1, x_3, \ldots, x_{p-1}\} \to \{x\}.$$

Далее, аналогичным образом получим $E(<\{x, x_2, x_4, \ldots, x_p\}>)=\varnothing$, т. е.

$$K^*_{n,\, n+1} \subseteq G \subseteq (K_n + \overline{K}_{n+1})^*.$$

С л у ч а й 2.2. Путь P не покрывается путями $P_1, P_2, \ldots, P_r$. В этом случае снова с помощью специальной конструкции орграфа G показывается существование контура длины m, что противоречит предположению $\vec{C}_m \not\subset G$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

Կամայական երկարությամբ ցիկլեր մեծ կիսաաստիճաններով կողմնորոշված գրաֆներում

Ապացուցվում է հետևյալ պնդումները.

Թ ե ո ր ե մ 1. Դիցուք G հանդիսանում է p-գագաթանի ուժեղ կապակցված ոչ համիլտոնյան կողմնորոշված գրաֆ, որում ցանկացած երկու ոչ կից գագաթների աստիճանների գումարը $\geqslant 2p-2$: Երբ $\vec{C}_m$-ը G-ի մաքսիմալ երկարությամբ կողմնորոշված ցիկլ է, ապա՝

1. $\vec{C}_m$-ին չպատկանող ցանկացած երկու գագաթներ կից են; $\vec{C}_m$-ին չպատկանող ցանկացած գագաթի աստիճանը $\leqslant p-1$; $<V(G) \setminus V(\vec{C}_m)>$-ի ցանկացած բիկոմպոնենտ հանդիսանում է լրիվ կողմնորոշված գրաֆ: Բացի դրանից, երբ G 2-կապակցված է, ապա՝ $<V(G) \setminus V(\vec{C}_m)>$ հանդիսանում է տրանզիտիվ մրցաշար:

2. G պարունակում է ցանկացած k, $2 \leqslant k \leqslant m$ երկարության կողմնորոշված ցիկլ կամ $G = K^*_{[\frac{p}{2}][\frac{p}{2}]+1}$.

Թ ե ո ր ե մ 2. Դիցուք G հանդիսանում է $(2n+1)$-գագաթանի կողմնորոշված գրաֆ: Եթե G-ի ցանկացած գագաթի կիսաաստիճանները $\geqslant n$, ապա՝ G հանդիսանում է պանցիկլիկ կամ $G \in \{C^*_3, D_5, D_7, [(\overline{K}_n \cup K_n)+K_1]^*\}$ կամ

$$K^*_{n,\, n+1} \subseteq G \subseteq (K_n + \overline{K}_{n+1})^*,$$

որտեղ՝ D_5 և D_7 կողմնորոշված գրաֆները ցույց են տրված նկարում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, Мир, М., 1973. [2] *С. Х. Дарбинян*, Пансвязные и панциклические орграфы, автореф. дис. Минск, 1981. [3] *С. Х. Дарбинян, К. М. Мосесян*, ДАН АрмССР, т. 67, № 4 (1978). [4] *J. C. Bermond, C. Thomassen*, Cycles in digraphs. A survey, Prepr. Ser. Math. Inst. Aarhus univ., No. 10 (1980—1981). [5] *C. Thomassen*, Proc. London Math. Soc., 3, 42 (1981). [6] *С. Х. Дарбинян*, О панциклических орграфах. Препринт ВЦ АН АрмССР и ЕрГУ, Ереван, 1979.