ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Акопян, С. М. Мхитарян

К осесимметричной контактной задаче теории упругости при наличии износа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. А. Абрамяном 5/V 1982)

Контактным задачам теории упругости с учетом фактора износа контактирующих тел, имеющего абразивный характер, посвящены работы ([1,2]). В монографии ([1]) осесимметричная задача в такой постановке сведена к проблеме собственных функций интегрального оператора, порожденного полным эллиптическим интегралом первого рода.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача с учетом абразивного износа контактирующих тел, когда вращающийся абсолютно жесткий шар сжимается двумя одинаковыми упругими полупространствами. Задача сводится к интегральному уравнению относительно образа Лапласа нормальных контактных напряжений, преобразуемому далее к интегральному уравнению Винера—Хопфа. При помощи известного метода М. Г. Крейна ([3]) построено замкнутое решение этого уравнения и найден спектр соответствующего оператора.

1. Пусть абсолютно жесткий шар расположен между двумя одинаковыми упругими полупространствами и сжимается ими при помощи осесимметрично распределенных внутренних сил интенсивности $q(r, t)$. Одновременно на шар действует момент $M(t)$, вращающий его вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. При этом на площади контакта, которая имеет в плане форму круга радиуса a, возникают силы трения $\tau_{z\theta}$, вследствие чего основание изнашивается. Причем силы $\tau_{z\theta}$ имеют направление вращения и $\tau_{z\theta}=k\sigma_z$, где σ_z—нормальное давление на площадке, а k—коэффициент трения между контактирующими телами.

В дальнейшем будем рассматривать контакт шара только с одним из полупространств, так как задача симметричная. Условие контакта с учетом износа имеет вид ([1])

$$W(r, t)+W^*(r, t)=\delta(t)-f(r) \quad (0<r<a; \quad 0\leqslant t<\infty), \tag{1.1}$$

где $W(r, t)$—вертикальные перемещения граничных точек полупространства от нормальных контактных напряжений и внутренних сжимающих сил $q(r, t)$, $W^*(r, t)$—перемещение тех же точек, обусловленное износом, $\delta(t)$—мера сближения контактирующих тел, а $f(r)=$

$=R+\sqrt{R^2-r^2}$—функция, описывающая форму границы шара (R—радиус этого шара). Имеем

$$W(r,\ t)=\frac{4(1-\nu^2)}{\pi E}\int\limits_0^a \frac{r_0}{r_0+r}\,K\left(\frac{2\sqrt{r_0 r}}{r_0+r}\right)P(r_0,\ t)dr_0+g(r,\ t), \quad (1.2)$$

где

$$g(r,\ t)=-\frac{(1+\nu)}{E}\left[\,2(1-\nu)+(3-4\nu)\,\frac{\partial}{dz_0}\right]\int\limits_0^b W_{00}(r,\ \rho,\ z_0)q(\rho,\ t)d\rho,$$

$$W_{00}(r,\ \rho,\ z_0)=\int\limits_0^\infty e^{-sz_0}J_0(sr)J_0(s\rho)\,ds,$$

$P(r,\ t)=-\sigma_z$—нормальное контактное давление, ν и E—упругие константы, z_0—расстояние $q(r,\ t)$ от границы полупространства, b—радиус ее распределения, а $K(r)$ полный эллиптический интеграл первого рода.

Далее, приняв во внимание выражение $W^*(r,\ t)$ и воспользовавшись известными результатами ([1]), решение поставленной задачи сведем к решению следующего интегрального уравнения:

$$\overline{P}_1(\rho,\ s)-\mu\int\limits_0^1 \frac{1}{\rho_0+\rho}\,K\left(\frac{2\sqrt{\rho_0\rho}}{\rho_0+\rho}\right)\overline{P}_1(\rho_0,\ s)d\rho_0=-s\overline{h}(\rho,\ s). \quad (1.3)$$

Здесь $\mu=4s(1-\nu^2)/\pi\omega k\beta E$, а $\overline{P_1}(\rho,\ s)$ и $\overline{h}(\rho,\ s)$—образы Лапласа приведенных контактных напряжений и функции $h(\rho,\ t)=[\delta(t)-f(\rho a)-$ $-g(a\rho,\ t)]$ соответственно.

Предположим, как в ([1]), что область контакта во времени не изменяется. Тогда функция $\overline{P}_1(\rho,\ s)$ должна еще удовлетворять условиям гладкого контакта и равновесия:

$$\overline{P}_1(1,\ s)=0; \quad a\int\limits_0^1 \overline{P}_1(\rho,\ s)d\rho=\overline{P}_0(s), \quad (1.4)$$

где $\overline{P}_0(s)$—образ Лапласа равнодействующих внутренних сил.

2. Уравнение (1.3) сведем к интегральному уравнению Винера—Хопфа, для чего положим:

$$\rho_0=e^{-x};\quad \rho=e^{-y};\quad \varphi(y,\ s)=e^{-y/2}\overline{P}_1(e^{-y},\ s);\quad F(y,\ s)=-se^{-y/2}\overline{h}(e^{-y},\ s).$$

Тогда (1.3) примет вид

$$\varphi(y,\ s)-\mu\int\limits_0^\infty r(x-y)\varphi(x,\ s)dx=F(y,\ s)\quad (0\leqslant y<\infty), \quad (2.1)$$

$$r(x)=\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,x/2}\,K\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x/2}\right).$$

Далее, следуя известному методу ([3]), рассмотрим преобразование Фурье ядра этого уравнения:

$$R(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}r(x)dx=\frac{\pi}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\lambda}{2}\right)}\,; \tag{2.2}$$

здесь $\Gamma(z)$—гамма-функция Эйлера.

На основе результатов работы ([3]) находим, что порожденный ядром $r(x-y)$ оператор обладает сплошным спектром, дающимся формулой

$$\mu=\frac{4}{\pi}\,\frac{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{i\lambda}{2}\right)\right|^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\lambda}{2}\right)\right|^2}\quad(-\infty<\lambda<\infty), \tag{2.3}$$

откуда

$$c\leqslant\mu<\infty\quad(c=[2\Gamma(3/4)]^2/\pi[\Gamma(1/4)]^2).$$

Отсюда опять на основе ([3]) получим, что (2.1) имеет единственное решение в указанных там пространствах, если $\mu\notin(c,\infty)$, так как в данном случае

$$K(\lambda)=1-R(\lambda)\neq0;\quad -\operatorname{ind}K(\lambda)=0\quad(-\infty<\lambda<\infty). \tag{2.4}$$

Далее, займемся вопросом факторизации функции $[K(\lambda)]^{-1}$. Очевидно, что полюсами функции $K(\lambda)$ являются точки $\lambda=\pm\left(2n+\frac{1}{2}\right)i$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Легко проверить также, что большие нули этой функции имеют асимптотику $\lambda_n\cong\pm i\left(2n+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4n}+\ldots\right)$. Следовательно, так как $K(\lambda)$ четная функция с нулями $\pm i\mu_n$ $\left(\mu_n\underset{n\to\infty}{\sim}2n+\frac{1}{2}-\frac{\mu}{4n}+\ldots\right)$ и полюсами $\pm i\alpha_n\left(\alpha_n=2n+\frac{1}{2}\right)$; $(n=0,1,2,\ldots)$, то ее можно представить в следующем виде ([4]):

$$K(\lambda)=K(0)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\lambda^2/\mu_n^2]}{[1+\lambda^2/\alpha_n^2]},$$

откуда

$$G(\lambda)=[K(\lambda)]^{-1}=[K(0)]^{-1}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\lambda^2/\alpha_n^2]}{[1+\lambda^2/\mu_n^2]}.$$

Тогда сразу можем записать

$$G_+(\lambda)=G_-(-\lambda)=[K(0)]^{-1/2}e^{-\varkappa(\lambda)}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\lambda^2/\alpha_n^2]}{[1+\lambda^2/\mu_n^2]}\,e^{\lambda i\left(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\mu_n}\right)}, \tag{2.5}$$

где $\varkappa(\lambda)$—нечетная целая функция, которую еще нужно определить. Следуя известным результатам ([3]) и используя тот факт, что $\ln G_+(\lambda)\to0$ при $|\lambda|\to\infty$, получим

$$\varkappa(\lambda)=\lambda i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{\mu_n}\right).$$

Подставляя значение $\varkappa(\lambda)$ в (2.5), окончательно найдем

$$G_+(\lambda)=G_-(-\lambda)=[K(0)]^{-1/2}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{[1+\lambda/i\alpha_n]}{[1+\lambda/i\mu_n]}. \qquad (2.6)$$

Теперь найдем резольвенту ядра интегрального уравнения (2.1) $\gamma(x, y, \mu)$. Согласно теореме 1 из ([3]), имеем

$$\gamma(x, y, \mu)=\gamma(x-y, 0, \mu)+\gamma(0, y-x, \mu)+\int_0^{\infty}\gamma(x-r, 0, \mu)\gamma(0, y-r, \mu)dr, \qquad (2.7)$$

где в нашем случае из-за четности функции $K(\lambda)$ будем иметь

$$\gamma(x, 0, \mu)=\gamma(0, x, \mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[G_+(\lambda)-1]e^{-i\lambda x}d\lambda \quad (0\leqslant x<\infty); \qquad (2.8)$$

$$\gamma(x, 0, \mu)=\gamma(0, x, \mu)=0 \quad (-\infty<x<0).$$

Вычисляя значение интеграла, входящего в (2.8), и подставляя полученное значение $\gamma(x, 0, \mu)$ в (2.7), находим

$$\gamma(x, y, \mu)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m e^{-\mu_m|x-y|}+\sum_{m,k=0}^{\infty}A_m A_k\frac{e^{-\mu_m x-\mu_k y}}{\mu_m+\mu_k}[e^{(\mu_m+\mu_k)\min(x,y)}-1]; \qquad (2.9)$$

здесь

$$A_m=[K(0)]^{-1/2}(\alpha_m-\mu_m){\prod_{n=0}^{\infty}}'\frac{(\alpha_n-\mu_m)\mu_m\mu_n}{(\mu_n-\mu_m)\alpha_m\alpha_n} \quad (m=0, 1, 2, \ldots),$$

а штрих означает, что в бесконечном произведении член $n=m$ отсутствует. Отсюда опять по теореме 1 из ([3]) получим

$$\varphi(y, s)=F(y, s)+\int_0^{\infty}\gamma(x, y, \mu)F(x, s)dx.$$

При переходе к старым переменным будем иметь

$$\overline{P}_1(\rho, s)=-s\overline{h}(\rho, s)-\frac{s}{\sqrt{\rho}}\int_0^1\gamma^*(\rho, \rho_0, \mu)\overline{h}(\rho_0, s)\frac{d\rho_0}{\sqrt{\rho_0}}; \qquad (2.10)$$

$$\gamma^*(\rho, \rho_0, \mu)=\gamma(\ln\rho, \ln\rho_0, \mu).$$

Теперь оригинал функции $\overline{P}_1(\rho, s)$ определится при помощи обратного преобразования Лапласа.

Отметим, что неизвестные до сих пор радиус области контакта a и взаимное сближение $\delta(t)$ контактирующих тел определяются при помощи условий (1.4).

Подчеркнем, что после определения резольвенты уже нетрудно построить собственные функции интегрального оператора, порожденного ядром $r(x-y)$. А именно, указанные собственные функции являются решениями граничной задачи ([3])

$$\left(\frac{d}{dt}+i\alpha\right)\varphi=\gamma(t,\ 0);\quad \varphi(0)=1.$$

Соответствующая спектральная плотность $\rho(\lambda)$ определяется по формуле ([5])

$$\gamma(x,\ y,\ \mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x,\ \lambda)\varphi(y,\ \lambda)}{\lambda-\mu}\rho(\lambda)d\lambda,$$

где $\gamma(x,\ y,\ \mu)$ выражается формулой (2.9).

Более подробный анализ поставленной задачи составляет предмет отдельного исследования.

Институт механики АН Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Մաշման հաշվառումով առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդրի մասին

Ուսումնասիրված է առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիր, կոնտակտի մեջ մտնող մարմինների մաշման հաշվառումով, երբ պտտվող բացարձակ կոշտ գունդը սեղմվում է երկու առաձգական կիսատարածությունների միջև։ Խնդիրը բերվում է ինտեգրալ հավասարման կոնտակտային լարումների Լապլասի կերպարի նկատմամբ, որը ձևափոխվում է Վիներ-Հոպֆի հավասարման։ Մ. Գ. Կրեյնի հայտնի մեթոդի օգնությամբ կառուցված է այդ հավասարման լուծումը և գտնված է համապատասխան օպերատորի սպեկտրը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Галин*, Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, Наука, М., 1980 [2] *В. М. Александров, В. Е. Коваленко*, Журн. прикл. мех и тех. физики, № 3, 1980. [3] *М. Г. Крейн*, УМН, т. 13, вып. 5 (83) (1958). [4] *Б. Нобл*, Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962. [5] *М. Г. Крейн, П. Я. Нудельман*, ДАН СССР, сер. мат-физ. наук, т. 209 № 3 (1973).