

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР О. М. Сапонджян,
 П. Г. Кешишян

Изгиб равномерно нагруженной тонкой круглой плиты,
 свободной по контуру и жестко соединенной с колоннами
 круглого поперечного сечения

(Представлено 26/II 1982)

Рассматривается задача изгиба круглой плиты, свободной по контуру и жестко соединенной с четырьмя колоннами круглого поперечного сечения.

В работе применяется контурное условие Лехницкого—Сапонджяна (1,2) для решения задачи свободной по контуру круглой плиты, жестко соединенной с колоннами круглого поперечного сечения.

Для простоты полагаем, что центры поперечных сечений колонн находятся на осях x и y и расположены симметрично относительно центра плиты (рис. 1). Введем обозначения: a —расстояние центров колонн от центра плиты, R —радиус плиты, r_0 —радиус поперечного сечения колонн, p —интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по всей области плиты, $w_1 \dots w_4$ —прогибы плиты в областях расположения колонн, w_5 —прогиб вне этих областей.

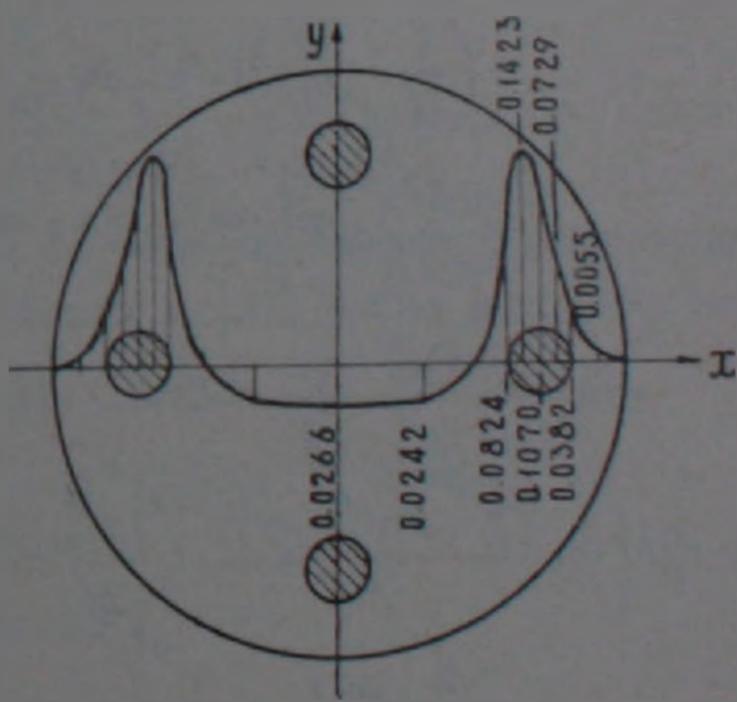
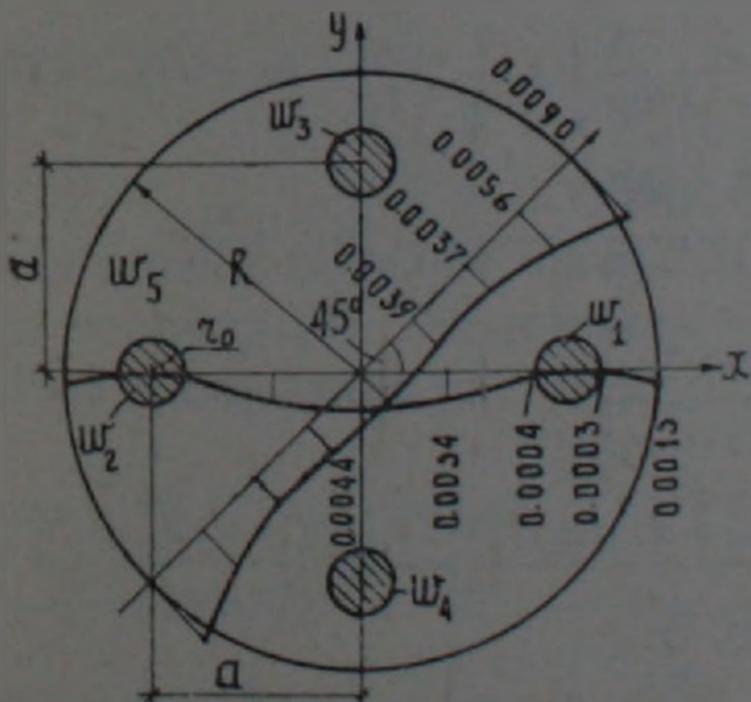


Рис. 1. Значения прогибов (в долях от pR^4/D)

Рис. 2. Значения моментов M_x (в долях от pR^2)

Представим выражения прогибов в виде

$$w_i = f_p + \sum_{k=1}^4 f_{ik} + \Phi \quad (i=1 \dots 5), \tag{1}$$

где Φ — бигармоническая функция, f_p — частное решение от равномерно распределенной нагрузки, равное

$$f_p = \frac{pz^2\bar{z}^2}{64D},$$

а f_{ik} — частное решение для i -той области от реакции k -той колонны. Эти частные решения определяются через частные решения, входящие в выражения для прогибов вспомогательной задачи (2):

$$f_{hh} = (f_1)_{\varphi_k}, \quad f_{ik} = (f_2)_{\varphi_k} \quad (i \neq k); \quad (2)$$

φ_k — угол между осью x и осью, проходящей через начало координат и центр k -той колонны. Положительное направление угла отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Из (1) с учетом (2) и (3) получим:

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{pR^4}{32D} \left\{ n_0 \beta^2 \left[(2\zeta\bar{\zeta} + 2a^2 + \beta^2) \ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)(\zeta^2+a^2)(\bar{\zeta}^2+a^2)}{\beta^6} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2ia(\zeta-\bar{\zeta}) \ln \frac{(\zeta-ia)(\bar{\zeta}+ia)}{(\zeta+ia)(\bar{\zeta}-ia)} + 2a(\zeta+\bar{\zeta}) \ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)}{\beta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\beta^2} (\zeta-a)^2 (\bar{\zeta}-a)^2 - 2a(\zeta+\bar{\zeta}) - 6\zeta\bar{\zeta} - 6a^2 + \frac{15}{2}\beta^2 \right] + \right. \\ \left. + n_1 \beta^4 \left[\ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)(\zeta^2+a^2)(\bar{\zeta}^2+a^2)}{\beta^6} + \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{2a} \ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)}{\beta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i(\zeta-\bar{\zeta})}{2a} \ln \frac{(\zeta-ia)(\bar{\zeta}+ia)}{(\zeta+ia)(\bar{\zeta}-ia)} + \frac{1}{3} \beta^2 \left(\frac{1}{\zeta^2+a^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2+a^2} \right) + \frac{\beta^2}{6a} \left(\frac{1}{\zeta+a} + \frac{1}{\bar{\zeta}+a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{12a\beta^4} (\zeta-a)^2 (\bar{\zeta}-a)^2 (\zeta+\bar{\zeta}-2a) - \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{2a\beta^2} (\zeta+a)(\bar{\zeta}+a) + \frac{1}{\beta^2} (\zeta-\bar{\zeta})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{4a} - \frac{a}{\beta^2} \right) (\zeta+\bar{\zeta}) - \frac{3}{\beta^2} (\zeta\bar{\zeta}+a^2) + \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{2} \zeta^2 \bar{\zeta}^2 \right\} + \Phi, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_5 = \frac{pR^4}{32D} \left\{ n_0 \beta^2 \left[(2\zeta\bar{\zeta} + 2a^2 + \beta^2) \ln \frac{(\zeta^4-a^4)(\bar{\zeta}^4-a^4)}{\beta^8} + 2a(\zeta+\bar{\zeta}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)}{(\zeta-a)(\bar{\zeta}-a)} + 2ia(\zeta-\bar{\zeta}) \ln \frac{(\zeta-ia)(\bar{\zeta}+ia)}{(\zeta+ia)(\bar{\zeta}-ia)} - 8\zeta\bar{\zeta} - 8a^2 + 10\beta^2 \right] + \right. \\ \left. + n_1 \beta^4 \left[\ln \frac{(\zeta^4-a^4)(\bar{\zeta}^4-a^4)}{\beta^8} + \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{2a} \ln \frac{(\zeta+a)(\bar{\zeta}+a)}{(\zeta-a)(\bar{\zeta}-a)} + \frac{i(\zeta-\bar{\zeta})}{2a} \ln \frac{(\zeta-ia)(\bar{\zeta}+ia)}{(\zeta+ia)(\bar{\zeta}-ia)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} a^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\zeta^4-a^4} + \frac{1}{\bar{\zeta}^4-a^4} \right) - \frac{4}{\beta^2} (2\zeta\bar{\zeta} + a^2) + 2 \right] + \frac{1}{2} \zeta^2 \bar{\zeta}^2 \right\} + \Phi, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\zeta = \frac{z}{R}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\bar{z}}{R}, \quad a = \frac{a}{R}, \quad \beta = \frac{r_0}{R},$$

а неизвестные постоянные n_0 и n_1 выражены через q_0 и q_1 :

$$n_0 = q_0 \frac{1}{\rho}, \quad n_1 = q_1 \frac{a}{\rho},$$

q_0 и q_1 — постоянные, входящие в формулу распределения давления от колонн (3). Исходя из симметричности задачи, значения w_2 , w_3 и w_4 здесь и в дальнейшем не приводятся.

Переходим к определению бигармонической функции Φ и постоянных n_0 и n_1 . Для этого выразим бигармоническую функцию Φ через две аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ формулой Гурса

$$\Phi = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(z). \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\psi(z) = \chi'(z),$$

откуда

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz + \frac{pK^4}{64D} c_0, \quad (6)$$

где c_0 — действительная постоянная.

Контурные условия для свободного края приводятся к виду (7)

$$\bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) - x\bar{\varphi}(t) + c_1 + ic_2 = g_1 + ig_2, \quad (7)$$

где $t = Re^{i\theta}$ — комплексная координата произвольной точки контура L , c_1 и c_2 — действительные постоянные, $x = (3 + \nu)/(1 - \nu)$, ν — коэффициент Пуассона, а

$$g_1 + ig_2 = - \int_R^I \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \right)_L dt + \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_R^I \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial \bar{z}} \right)_L d\bar{t} - \\ - \frac{2}{1-\nu} \int_R^I d\bar{t} \int_R^I \left[\left(\frac{\partial^3 f_3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right)_L dt - \left(\frac{\partial^3 f_3}{\partial z \partial \bar{z}^2} \right)_L d\bar{t} \right]. \quad (8)$$

При этом

$$\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \right)_L, \quad \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial \bar{z}} \right)_L, \quad \left(\frac{\partial^3 f_3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right)_L, \quad \left(\frac{\partial^3 f_3}{\partial z \partial \bar{z}^2} \right)_L -$$

контурные значения производных от частного решения f_3 , входящего в формулу (4). Подставляя эти значения в (8), после ряда преобразований получим

$$g_1 + ig_2 = \frac{pR^3}{16D} \left[A + Be^{-i\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} Q_1(k) e^{-(4k+1)i\theta} + \right. \\ \left. + x \sum_{k=1}^{\infty} Q_2(k) e^{(4k-1)i\theta} \right], \quad (9)$$

где

$$A = \frac{x-1}{4} \left(\alpha \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \ln \frac{\beta^4}{1-\alpha^4} \right) - \frac{(x+1)\alpha}{2} \operatorname{arctg} \alpha - \frac{\beta^2}{2(1-\alpha^4)} + \frac{1}{2} + \\ + n_1 \beta^4 \left[\frac{x+1}{2\alpha} \operatorname{arctg} \alpha - \frac{x-1}{4\alpha} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{4x^2 \beta^2}{3(1-\alpha^4)^2} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2(x-1)}{\beta^2} + 2 \right],$$

$$B = (x-1)\ln\beta + \alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2} - 2n_1\beta^4 \left(\frac{x-1}{\beta^2} + 1 \right),$$

$$Q_1(k) = \alpha^{4k} \left[\frac{\alpha^2}{4k+1} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2}\beta^2 - n_1\beta^4 \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{4\beta^2}{3\alpha^2}k - \frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) \right],$$

$$Q_2(k) = \frac{\alpha^{4k-2}}{4k-1} \left(n_1\beta^4 - \frac{\alpha^2}{4k} \right).$$

При этом учтен вытекающий из условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на плиту, результат: $n_0 = -1/4\beta^2$.
 Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в области круга разлагаются в ряды Тейлора:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (10)$$

Подставляя в (7) контурные значения функций (10), разложив при этом правую часть (7) с учетом (9) в степенные ряды и сравнивая коэффициенты при $e^{\pm ki\theta}$, находим коэффициенты рядов функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. В результате имеем:

$$\varphi(z) = a_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k+1} z^{4k+1}, \quad (11)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{4k-1} z^{4k-1}, \quad (12)$$

где

$$a_1 = \frac{pR^2}{16D} \left[2n_1\beta^4 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\beta^2} \right) - \ln\beta + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{2} - \alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \right];$$

$$a_{4n+1} = \frac{p\alpha^{4n}}{16xD R^{4n-2}} \left[n_1\beta^4 \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{4\beta^2}{3\alpha^2}n - \frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) - \frac{\alpha^2}{4n+1} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2}\beta^2 \right], \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$a'_{4n-1} = \frac{p\alpha^{4n}}{16xD R^{4n-4}} \left\{ n_1\beta^4 \left[\frac{x^2}{(4n-1)\alpha^2} - \frac{16\beta^2}{3\alpha^2}n^2 + \frac{4n}{3\alpha^2}(3-3\alpha^2-\beta^2) + \frac{1-2\alpha^2}{\alpha^2} \right] - \frac{x^2}{4n(4n-1)} - \frac{4n+1}{4n} + \frac{4n+1}{2}\beta^2 + \alpha^2 \right\}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Бигармоническая функция Φ определяется из (5) с учетом (6), (11) и (12). Суммируя ряды и произведя некоторые преобразования, получим выражение для функции Φ . Подставив его в (3) и (4), определим прогибы w_1 и w_5 .

Неизвестные постоянные n_1 и c_0 определяются из условий контакта плиты с колонной. Эти условия относим к центральной точке поперечного сечения колонн, в которых фиксируется прогиб и угол наклона упругой поверхности плиты, в соответствии с чем закон распределения давления между плитой и колонной принят линейным (3). Пренебрегая для простоты деформациями колонн, вследствие их

большей жесткости по сравнению с плитой, условия для определения n_1 и c_0 выразим равенствами

$$w_1=0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=a.$$

После определения прогибов по известным формулам определяем изгибающие моменты и поперечные силы. При этом выражения для них представляются в замкнутом виде.

Пример. Примем $\alpha=0,7$, $\beta=0,1$, коэффициент Пуассона $\nu=0,2$. Результаты вычислений приводятся в виде эпюры (рис. 1). Значения изгибающих моментов определены для сечений, перпендикулярных к оси x (рис. 2).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ քզրադից-անդամ Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, Գ. Գ. ԹԵՆԻՇՅԱՆ

Կլոբ լայնական ճատույթով սյուներին կոշտ միացած և եզրագծով ազատ բարակ կլոբ սալի ծուծեր

Աշխատանքում որոշված են եզրագծով ազատ և հավասարաչափ բեռնավորված բարակ կլոբ սալի ճկվածքներն ու ծոռղ մոմենտները, երբ սալը կոշտ միացված է շորս կլոբ և միևնույն լայնական հատույթով սյուներին, որոնք համաչափ են դասավորված սալի կենտրոնի նկատմամբ:

Ծնթադրվում է, որ սալի և սյուներից յուրաքանչյուրի կոնտակտի պայմանը տեղի է ունենում դրանց հպման մակերեսի կենտրոնում, որում ֆիքսվում են սալի ճկվածքը և առաձգական մակերևույթի թեթույթյան անկյունը: Հստ որի էլ սալի և սյուների միջև առաջացած ճնշումների բաշխման օրենքը ընդունված է գծային:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. Г. Лехницкий, ПММ, т. 2, вып. 2 (1938). ² О. М. Сапонджян, Изгиб тонких упругих плит, Айнастан, Ереван, 1975. ³ О. М. Сапонджян, П. Г. Кешишян, ДАН АрмССР, т. 71, № 1 (1980).