

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Д. О. Мурадян

Минимальные нумерации двумерного цилиндра

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/II 1982)

Л. Х. Харпер в ряде работ (напр. ^(1,2)) отмечал полезность минимальных нумераций „решетчатых“ графов для некоторых задач теории кодов. В частности, в ⁽²⁾ рассматривается двумерный тор (декартово произведение двух простых циклов) и изучаются некоторые свойства его минимальных нумераций. В ⁽³⁾ находятся минимальные нумерации двумерной решетки (декартова произведения двух простых цепей) и доказывается, что они являются минимальными и для тора.

Естественным продолжением этих работ предполагается исследование задачи для двумерного цилиндра (декартова произведения простой цепи и простого цикла). Этому вопросу и посвящена настоящая работа. Все не определяемые в работе понятия можно найти в монографии ⁽⁴⁾.

Пусть $G(X, U)$ — граф со множеством вершин X ($|X|=N$) и множеством ребер U . Каждое взаимно-однозначное соответствие $\varphi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ называется нумерацией графа G , а $\varphi(x)$ — номером вершины x . Пусть Φ_G — множество всевозможных нумераций графа G . Числа

$$E_{\varphi}(G) = \sum_{(x,y) \in U} |\varphi(x) - \varphi(y)|,$$

$$E(G) = \min_{\varphi \in \Phi_G} E_{\varphi}(G)$$

называются соответственно длиной нумерации φ и графа G . Нумерация φ_0 называется минимальной, если $E_{\varphi_0}(G) = E(G)$.

Пусть X', X'' — непересекающиеся подмножества множества X . Обозначим через $d(X', X'')$ число ребер, один конец которых принадлежит множеству X' , а другой — X'' . Обозначим $d(X') = d(X', X \setminus X')$ и $\varphi_0[l, k] = \{\varphi_0^{-1}(l), \varphi_0^{-1}(l+1), \dots, \varphi_0^{-1}(k)\}$, где $1 \leq l \leq k \leq N$. В дальнейшем в случае полной ясности индекс G при записи $\varphi_0[l, k]$ будем опускать.

Граф со множеством вершин $I^{m,n} = \{x_{i,j}\}_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ назовем двумерным цилиндром (обозначим через $C^{m,n}$), если вершины $x_{i,j}$ и $x_{k,l}$ смежны тогда и только тогда, когда либо $i=k$ и $|j-l|=1$, либо $j=l$ и $|i-k|=$

$$= \begin{cases} 1 \\ m-1. \end{cases}$$

Пусть $k, l \leq m$ и $1 \leq s < t \leq n$. Обозначим

$$I_{k,s}^{l,t} = \begin{cases} \{x_{i,j} \in I^{m,n} / k \leq i \leq l; s \leq j \leq t\} / k \leq l \\ \{x_{i,j} \in I^{m,n} / i \in \overline{1, m} \setminus \overline{l+1, k-1}; s \leq j \leq t\} / k > l. \end{cases}$$

Множество $I_{1,j}^{m,j}$ назовем j -ым циклом, а первый и n -ый циклы — соответственно левым и правым рубежами цилиндра.

Определение. Множество $X \subset I^{m,n}$ назовем сжатым относительно левого рубежа (правого рубежа и вершины $x_{1,1}$), если из $x_{i,j} \in X$ следует $I_{i,1}^{j,j} \subset X$ (соответственно $-I_{i,n}^{j,j} \subset X$ и $I_{1,1}^{j,j} \subset X$).

Определение. Множество $X \subset I^{m,n}$ назовем циклически сжатым, если для каждого непустого множества $X \cap I_{1,j}^{m,j}$ ($j \in \overline{1, n}$) — порожденный им подграф есть простая цепь либо цикл.

Теорема 1. Если φ — минимальная нумерация, то для любого $k \in \overline{1, mn-1}$ множество $\varphi_{C^{m,n}}[1, k]$ циклически сжато и сжато относительно хотя бы одного рубежа.

Идея доказательства теоремы заключается в следующем. Берется произвольное множество $X \subset I^{m,n}$ и преобразовывается („сжимается“) в множество $\bar{X} \subset I^{m,n}$ одинаковой с X мощностью, которое циклически сжато и сжато относительно хотя бы одного рубежа. Затем доказывается, что $d(X) \geq d(\bar{X})$, притом равенство имеет место тогда и только тогда, когда X также обладает указанным свойством. Из ⁽¹⁾ известно, что для любого N -вершинного графа G и его нумерации ψ

$$E_{\psi}(G) = \sum_{i=1}^N d(\psi_0[1, i]). \quad (1)$$

Из равенства ⁽¹⁾ и из произвольного выбора множества X легко вытекает справедливость предложения.

Определение. Нумерацию $\varphi \in \Phi_{C^{m,n}}$ назовем циклически сжатой (сжатой относительно левого рубежа, правого рубежа и вершины $x_{1,1}$), если для любого $i \in \overline{1, mn}$ множество $\varphi[1, i]$ циклически сжато (соответственно — сжато относительно левого рубежа, правого рубежа и вершины $x_{1,1}$).

Сжатость множеств и нумераций относительно остальных вершин рубежей определяется аналогично.

Теорема 2. Существует минимальная нумерация, сжатая относительно вершины $x_{1,1}$.

Схема доказательства теоремы следующая. Рассматривается произвольная минимальная нумерация φ . По предыдущей теореме она сжата относительно хотя бы одного рубежа, пусть левого (если φ сжата относительно правого рубежа, то вместо φ берется нумерация $\psi: \psi(x_{i,j}) = \varphi(x_{i, n-j+1})$ ($i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}$), которая, очевидно, сжата относительно левого рубежа и минимальна). Далее рассматривается нумерация $\bar{\varphi}$, сжатая относительно вершины $x_{1,1}$; такая, что множество номеров вершин каждого цикла при φ и $\bar{\varphi}$ совпадают, и показывается, что $E_{\varphi}(C^{m,n}) \geq E_{\bar{\varphi}}(C^{m,n})$.

Замечание. Для каждой вершины рубежей существует сжатая относительно нее минимальная нумерация.

В остальной части работы описывается класс минимальных, сжатых относительно вершины $x_{1,1}$ нумераций.

Определение. Подмножество вершин X' графа $G(X, U)$ называется сплошным при нумерации $\varphi \in \Phi_0$ (см. (3)), если $\max_{x \in X'} \varphi(x) - \min_{x \in X'} \varphi(x) = |X'| - 1$.

Если подмножества вершин X', X'' графа $G(X, U)$ сплошные при нумерации $\varphi \in \Phi_0$ и $\min_{x \in X'} \varphi(x) = \max_{x \in X''} \varphi(x) + 1$, то этот факт запишем в следующем виде: $X'' \overset{\varphi}{\leftarrow} X'$.

Пусть $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

$$a + \bar{a} \leq n; \max\{a, \bar{a}\} \leq \frac{m}{4}; \quad b + \bar{b} \leq \frac{m}{2}; \quad \max\{b, \bar{b}\} \leq \frac{n}{2}.$$

Зафиксируем две нумерации — $\varphi_0 = \varphi_0(a, \bar{a})$ и $\psi_0 = \psi_0(b, \bar{b})$ графа $C_{m,n}$.

Нумерация φ_0 задается следующим образом:

1) φ_0 сжата относительно вершины $x_{1,1}$;

$$2) \begin{matrix} \varphi_0 \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} 2a, a \\ 1, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m-2a, a \\ 2a+1, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, a \\ m-2a+1, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, n-\bar{a} \\ 1, a+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2\bar{a}, n \\ 1, n-\bar{a}+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m-2\bar{a}, n \\ 2\bar{a}+1, n-\bar{a}+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, n \\ m-2\bar{a}+1, n-\bar{a}+1 \end{matrix};$$

3) для каждого $i \in \overline{1, a}$ множества $\begin{matrix} 2i, i \\ 1, 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 2i-1, i \\ 1, 1 \end{matrix}, \begin{matrix} m, i \\ m-2i+1, 1 \end{matrix}, \begin{matrix} m, i \\ m-2i+2, 1 \end{matrix}$ сплошные, причем $\begin{matrix} 2i-1, i-1 \\ 2i-1, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-1, i \\ 1, 1 \end{matrix}$ либо $\begin{matrix} 2i-2, i \\ 1, i \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-1, i \\ 2i-1, 1 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} m-2i+2, i-1 \\ m-2i+2, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, i-1 \\ m-2i+3, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, i \\ m-2i+2, 1 \end{matrix}$ либо $\begin{matrix} m-2i+2, i \\ m-2i+2, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, i-1 \\ m-2i+3, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, i \\ m-2i+3, 1 \end{matrix}$;

4) для каждого $i \in \overline{1, a}$ множества $\begin{matrix} 2i, n \\ 1, n-i+1 \end{matrix}, \begin{matrix} 2i-1, n \\ 1, n-i+1 \end{matrix}, \begin{matrix} m, n \\ m-2i+1, n-i+1 \end{matrix}, \begin{matrix} m, n \\ m-2i+2, n-i+1 \end{matrix}$ сплошные, причем $\begin{matrix} 2i-1, n-i+1 \\ 1, n-i+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-2, n \\ 1, n-i+2 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-1, n \\ 2i-1, n-i+2 \end{matrix}$ либо $\begin{matrix} 2i-2, n-i+1 \\ 1, n-i+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-2, n \\ 1, n-i+2 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} 2i-1, n \\ 2i-1, n-i+1 \end{matrix}$ и $\begin{matrix} m, n-i+1 \\ m-2i+2, n-i+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m-2i+2, n \\ m-2i+2, n-i+2 \end{matrix}$ либо $\begin{matrix} m-2i+2, n \\ m-2i+2, n-i+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, n-i+1 \\ m-2i+3, n-i+1 \end{matrix}$;

5) для любых $i \in \overline{2a+1, m-2a-1}, j \in \overline{a+1, n-\bar{a}-1}, k \in \overline{2\bar{a}+1, m-2\bar{a}-1}$

$$\begin{matrix} i, a \\ i, 1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} i+1, a \\ i+1, 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} m, j \\ 1, j \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} m, j+1 \\ 1, j+1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} k, n \\ k, n-\bar{a}+1 \end{matrix} \overset{\varphi_0}{\leftarrow} \begin{matrix} k+1, n \\ k+1, n-\bar{a}+1 \end{matrix}.$$

Нумерация ψ_0 задается следующим образом:

1) ψ_0 сжата относительно вершины $x_{1,1}$;

Теорема 3. Нумерация φ , сжатая относительно вершины $x_{1,1}$, является минимальной тогда и только тогда, когда

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0(a, \bar{a})/m \leq 2n-1 \\ \varphi_0(b, \bar{b})/m \geq 2n \end{cases}$$

при следующих значениях $a, \bar{a}, b, \bar{b}$:

$$\left\lfloor \frac{2m-1-\sqrt{2m^2-2m+1}}{4} \right\rfloor \leq a, \bar{a} \leq \left\lceil \frac{2m+3-\sqrt{2m^2-2m+1}}{4} \right\rceil \quad (2)$$

$$\left\lfloor \frac{4n-3-\sqrt{8n^2-8n+1}}{4} \right\rfloor \leq b, \bar{b} \leq \left\lceil \frac{4n+1-\sqrt{8n^2-8n+1}}{4} \right\rceil \quad (3)$$

Замечание. Основываясь на теоремах 1–3 и на соотношении (1), можно построить полное описание множества минимальных нумераций двумерного цилиндра.

Теорема 3 доказывается через ряд утверждений, в каждом из которых устанавливается некоторое необходимое условие минимальности нумераций, сжатых относительно вершины $x_{1,1}$. Затем доказывается, что условие одновременного выполнения указанных условий для минимальности нумераций, сжатых относительно вершины $x_{1,1}$, является достаточным.

Общая схема доказательств указанных утверждений следующая: утверждение предполагается неверным и, опираясь на сжатость (а также на минимальность) нумерации и на условия данного утверждения, отыскиваются два множества вершин, которые находятся в противоречии со следующей леммой из (3).

Пусть X' некоторое подмножество вершин N -вершинного графа G и $\min_{x \in X'} \varphi(x) = l$, $\max_{x \in X'} \varphi(x) = k$ при некоторой нумерации $\varphi \in \Phi_G$. Обозначим:

$$\delta_\varphi(X') = \frac{1}{|X'|} \left\{ d(X', \varphi[k+1, N]) - d(X', \varphi[1, l-1]) \right\}.$$

Лемма. Если φ — минимальная нумерация графа $G(X, U)$, а $X', X'' \subset X$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $d(X', X'') = 0$ и $X'' \stackrel{\varphi}{\leftarrow} X'$, то

$$\delta_\varphi(X'') \leq \delta_\varphi(X').$$

Формула для вычисления длины двумерного цилиндра следующая:

$$E(C^{m,n}) = -\frac{8}{3}a^3 + 2(2m+1)a^2 - \left(m^2 + 3m - \frac{2}{3}\right)a + mn(m+2) - 2n - m$$

при $m \leq 2n-1$, и

$$E(C^{m,n}) = -\frac{8}{3}b^3 + 2(4n-1)b^2 - \left(4n^2 - \frac{2}{3}\right)b + mn(2n+1) - 2n - m$$

при $m \geq 2n$.

Заметим, что как в (2), так и в (3) нижние и верхние оценки a и b „почти всегда“ совпадают. При несовпадении же они отличаются на единицу, и нет разницы, какие из них взять как значения для a и b .

Республиканский информационный вычислительный центр (РИВЦ)
Министерства здравоохранения АрмССР

Դ. 2. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Երկչափ գլանի մինիմալ համարակալումները

Դիտարկենք $X(|X|=N)$ գազաթների բազմությունը G դրաֆտի Ամեն մի $\varphi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ փոխմիարժեք համապատասխանություն կոչվում է G դրաֆտի համարակալում, և համարակալումը կոչվում է մինիմալ, եթե կից գազաթների համարների տարբերությունների բացարձակ արժեքների գումարը ամենափոքրն է (նշված մինիմալ գումարը նշանակենք $E(G)$ -ով):

Աշխատանքում դիտարկվում է $C^{m,n}$ երկչափ գլանը՝ m երկարությամբ պարզ ցիկլի և n երկարությամբ պարզ շղթայի գեկարտյան արտադրյալը և նկարագրվում է նրա մինիմալ համարակալումների դասը: Բերվում է նաև $E(C^{m,n})$ -ի հաշվման բանաձևը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ L. H. Harper, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 12, № 1 (1964). ² L. H. Harper, J. Appl. Prob., vol. 4, № 2 (1967). ³ Д. О. Мурадян, Т. Э. Пилипосян, ДАН АрмССР, т. 70, № 1 (1980). ⁴ Ф. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973.