ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 3

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

С. С. Степанян

О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса A_α

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/II 1982)

Классам аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимают введенные М. М. Джрбашяном общеизвестные классы A_α ($-1<\alpha<\infty$), обладающие свойствами

$$A_\alpha \subset A_0 \ (-1<\alpha<0);$$

$$A_0 \subset A_\alpha \ (0<\alpha<\infty),$$

где $A_0=A$—известный класс А. Островского.

Класс A_α ($-1<\alpha<\infty$) определяется следующим образом.

Обозначим через A_α ($-1<\alpha<\infty$) класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию ([1], с. 655))

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} D^{-\alpha}_{(+)}\ln|f(re^{i\varphi})|d\varphi\right\}<+\infty,$$

где

$$D^{-\alpha}_{(+)}\ln|f(re^{i\varphi})|=\begin{cases} D^{-\alpha}\ln|f(re^{i\varphi})| & \text{при } D^{-\alpha}\ln|f(re^{i\varphi})|\geqslant 0 \\ 0 & \text{при } D^{-\alpha}\ln|f(re^{i\varphi})|\leqslant 0, \end{cases}$$

$D^{-\alpha}$—интегро-дифференциальный оператор произвольного порядка в смысле Римана—Лиувилля.

Класс A_α ($-1<\alpha<\infty$) совпадает с множеством функций $f(z)$, которые в круге $|z|<1$ допускают представление вида ([1], с. 655))

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda h_\alpha z^\lambda}B_\alpha(z;\ z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta}z)d\psi(\theta)\right\}, \qquad (1)$$

где

$$B_\alpha(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\ z_k)}$$

есть произвольное сходящееся произведение М. М. Джрбашяна,

$$S_\alpha(e^{-i\theta}z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-ze^{-i\theta})^{1+\alpha}}-1\right\},$$

$\psi(\theta)$—вещественная функция с конечным полным изменением на

$[-\pi, \pi]$, $k \geqslant 0$—любое целое число, γ—любое вещественное число, а $k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$.

Целью настоящей статьи является получение оценок для тейлоровских коэффициентов функций класса A_α $(-1 < \alpha \leqslant 0)$. Отметим, что для функций класса $A = A_0$ известны ((2), с. 151)) оценки тейлоровских коэффициентов, полученные С. Н. Мергеляном:

$$|a_n| \leqslant \exp\{2\sqrt{cn}\,(1+o(1))\}, \quad n \to +\infty.$$

Поскольку $A_\alpha \subset A_0$ $(-1 < \alpha < 0)$, то оценки С. Н. Мергеляна верны также для функций классов A_α $(-1 < \alpha < 0)$, которые, естественно, не могут быть точными.

В данной статье устанавливаются оценки для коэффициентов тейлоровских разложений для функций любого класса A_α $(-1 < \alpha < 0)$ в зависимости от α и приводится пример функции, для которой эти оценки улучшить нельзя.

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема. *Если функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < 1, \tag{2}$$

принадлежит классу A_α $(-1 < \alpha \leqslant 0)$, *то имеет место оценка*

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \sqrt[\alpha+2]{c_\alpha (1+\alpha) n^{\alpha+1}}\,(1+o(1))\right\}, \quad n \to +\infty, \tag{3}$$

где c_α—*некоторая положительная константа и эту оценку улучшить нельзя.*

Для доказательства этой теоремы докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $f(z) \in A_\alpha$ $(-1 < \alpha \leqslant 0)$, *то для нее имеет место оценка*

$$M_f(r) \leqslant \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\}, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{4}$$

где $M_f(r) = \max\limits_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|$, c_α—*некоторая константа, зависящая от* α.

Пусть $-1 < \alpha \leqslant 0$, тогда, обозначив,

$$F(z) = B_\alpha(z; z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z)\, d\psi(\theta)\right\}, \tag{5}$$

из (1) и (5) получим неравенство

$$M_f(r) \leqslant C M_F(r), \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{6}$$

где C—некоторая постоянная.

Из представления (5) следует неравенство

$$|F(z)| \leqslant |B_\alpha(z; z_k)| \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_\alpha(e^{-i\theta} z)|\, |d\psi(\theta)|\right\}, \tag{7}$$

причем известно ((3), теорема 2), что при $-1 < \alpha < o$

$$|B_\alpha(z;\ z_k)|\leqslant|B_0(z;\ z_k)|<1,\quad |z|<1, \tag{8}$$

где

$$B_0(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_kz}\cdot\frac{|z_k|}{z_k}$$

произведение Бляшке.

Из (7) и (8) следует

$$|F(z)|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_\alpha(e^{-i\theta}z)||d\psi(\theta)|\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\},$$

где

$$c_\alpha=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\psi(\theta)|,$$

откуда в силу (6) вытекает оценка (4).

Лемма 2. *Для любого* $\beta\in(0,\ +\infty)$ *предел выражения*

$$S_n^{(\beta)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\beta k(\beta k+1)\ldots(\beta k+n-1)}{n!} \tag{9}$$

равен нулю при $n\to+\infty$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\prod_{m=0}^{n-1}(\beta k+m)\leqslant\left[\frac{\sum_{m=0}^{n-1}(\beta k+m)}{n}\right]^n<(\beta k+n)^n. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что

$$S_n^{(\beta)}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\cdot\frac{(\beta k+n)^n}{n!}<\frac{(\beta+1)^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}k^n.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга

$$k!=\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{\theta_k}{12k}},\quad 0<\theta_k<1,\ k=1,2,\ldots,$$

для значения $S_n^{(\beta)}$ имеем

$$S_n^{(\beta)}<\frac{(\beta+1)^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(ce)^k}{k^{k+n}}<\frac{(\beta+1)^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(ce)^k}{n^{k-n}}=\frac{(\beta+1)^n}{n!}n^n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{ce}{n}\right)^k.$$

Из этого неравенства следует, что при $n>ce$ имеет место неравенство

$$S_n^{(\beta)}<\frac{(\beta+1)^n}{n!}\cdot\frac{(ce)^{n+1}}{n-ce}<\frac{H^n}{n!}ce,$$

где $H=ce(1+\beta)$.

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Если*

$$\gamma_{k,n}^{(\beta)}=\frac{c^k}{k!}\cdot\frac{\Gamma(\beta k+n)}{n!\Gamma(\beta k)}, \tag{11}$$

где c и β—положительные числа, не зависящие от n и k, то

$$\nu_n^{(\beta)} = \max_{k=1,2,\ldots,n} \gamma_{k,n}^{(\beta)} = \exp\left\{\frac{\beta+1}{\beta}\sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1))\right\}, \quad n\to+\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Прологарифмировав выражение (11) и воспользовавшись формулой Стирлинга $\ln n! = n\ln n - n + O(\ln n)$, получим

$$\ln \gamma_{k,n}^{(\beta)} = k\ln c + \ln\Gamma(\beta k+n) - k\ln k + k - O(\ln k) -$$

$$-n\ln n + n - O(\ln n) - \ln\Gamma(\beta k). \tag{13}$$

Используя асимптотическое представление $\Gamma(z)$ ([4], с. 124)), можем написать

$$\ln\Gamma(\beta k+n) = (\beta k+n)\ln(\beta k+n) - (\beta k+n) + O(\ln(\beta k+n)),$$

$$\ln\Gamma(\beta k) = \beta k\ln\beta k - \beta k + O(\ln\beta k). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\ln \gamma_{k,n}^{(\beta)} = k\ln c + (\beta k+n)\ln(\beta k+n) - k\ln k + k - n\ln n - \beta k\ln\beta k + O(\ln n). \tag{15}$$

Оценим максимум функции

$$\psi(x) = \ln\gamma_{x,n}^{(\beta)}, \quad 1\leqslant x\leqslant n.$$

Поскольку

$$\psi'(x) = \ln c + \beta\ln(\beta x+n) - \ln x - \beta\ln\beta x,$$

$$\psi''(x) = -\frac{\beta x+(1+\beta)n}{x(\beta x+n)} < 0,$$

то $\psi'(x)$ монотонно убывает в промежутке $1<x<n$. Для достаточно больших n будем иметь $\psi'(1)>0$, $\psi'(n)<0$, и значит для любого достаточно большого натурального числа n существует только одно значение $x=x_n$, $1<x_n<n$, для которого $\psi'(x_n)=0$, $\psi''(x_n)<0$ и $\max\limits_{1\leqslant x\leqslant n}\psi(x)=\psi(x_n)$. Из уравнения $\psi'(x_n)=0$ следует равенство

$$c\left(\beta\cdot\frac{x_n}{n}+1\right)^\beta = \beta^\beta\left(\frac{x_n}{n}\right)^\beta\cdot x_n,$$

и поскольку $1<x_n<n$, то отсюда вытекает, что $\frac{x_n}{n}\to 0$ при $n\to+\infty$.

Следовательно

$$x_n = \frac{1}{\beta}\sqrt[1+\beta]{c\beta n^\beta}(1+o(1))$$

при $n\to+\infty$.

Определив целое число $p_n=[x_n]$, мы вновь будем иметь

$$p_n = \frac{1}{\beta}\sqrt[1+\beta]{c\beta n^\beta}(1+o(1)), \quad n\to+\infty.$$

Заметив далее, что

$$\nu_n^{(\beta)} = \gamma_{p_n,n}^{(\beta)},$$

и подставив значение p_n в (15), получаем

$$\ln\nu_n^{(\beta)} = p_n\ln c + (\beta p_n + n)\ln(\beta p_n + n) - p_n\ln p_n + p_n - $$

$$- n\ln n - \beta p_n \ln\beta p_n + O(\ln n).$$

Так как $\ln\left(1+\frac{\beta p_n}{n}\right)\sim\frac{\beta p_n}{n}\to 0$, $n\to+\infty$, будем иметь

$$\ln\nu_n^{(\beta)} = p_n\ln c + (\beta p_n + n)\left(\ln n + \frac{\beta p_n}{n}\right) - p_n\ln p_n + p_n -$$

$$- n\ln n - \beta p_n\ln\beta p_n + O(\ln n) = p_n\left|(\ln c + \beta\ln n - \ln p_n - \right.$$

$$\left. - \beta\ln\beta p_n) + (\beta+1) + \left(\frac{\beta^2 p_n}{n} + \frac{O(\ln n)}{p_n}\right)\right|, \quad n\to+\infty. \tag{16}$$

Но при $n\to+\infty$

$$\ln c + \beta\ln n - \ln p_n - \beta\ln\beta p_n = o(1)$$

$$\frac{\beta^2 p_n}{n} + \frac{O(\ln n)}{p_n} = o(1). \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$\ln\nu_n^{(\beta)} = \ln\max_{k=1,2,\ldots,n}\gamma_{k,n}^{(\beta)} = \frac{\beta+1}{\beta}\sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1)), \quad n\to+\infty, \tag{18}$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

Лемма 4. *Для функции*

$$F_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{c}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} z^n, \quad |z|<1, \quad c>0$$

класса A_α $(-1<\alpha<\infty)$ *оценку* (3) *улучшить нельзя, поскольку*

$$b_n^{(\alpha)} = \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c(1+\alpha)n^{1+\alpha}}(1+o(1))\right\}, \quad n\to+\infty. \tag{19}$$

Обозначив $1+\alpha=\beta$ и принимая во внимание биномиальное разложение функции $(1-z)^{-1-\alpha}$, будем иметь

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\alpha)} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\beta k(\beta k+1)\ldots(\beta k+n-1)}{n!}\right)z^n.$$

Откуда следует, что

$$b_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\beta k(\beta k+1)\ldots(\beta k+n-1)}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\Gamma(\beta k+n)}{n!\Gamma(\beta k)}. \tag{20}$$

Разобьем сумму (20) на два слагаемых

$$b_n^{(\alpha)} = C_n + S_n^{(\beta)}, \tag{21}$$

где

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\Gamma(\beta k+n)}{n!\Gamma(\beta k)}, \quad S_n^{(\beta)} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\,\frac{\Gamma(\beta k+n)}{n!\Gamma(\beta k)}. \tag{22}$$

В силу (18) и (22) можем написать

$$\nu_n^{(\beta)} \leqslant C_n \leqslant n\nu_n^{(\beta)}, \quad n\to+\infty.$$

Имея в виду лемму 3, получим, что

$$\ln C_n = \ln \nu_n^{(\beta)} + O(\ln n) = \frac{\beta+1}{\beta} \sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1)), \quad n \to +\infty,$$

откуда следует, что

$$C_n = \exp\left\{\frac{\beta+1}{\beta} \sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1))\right\}, \quad n \to +\infty. \tag{23}$$

Наконец, из (21) и (23) имеем

$$b_n^{(\alpha)} = \exp\left\{\frac{\beta+1}{\beta} \sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1)) + \ln(1+\varepsilon_n)\right\}, \quad n \to +\infty, \tag{24}$$

где в силу леммы 2

$$\varepsilon_n = \frac{S_n^{(\beta)}}{\exp\left\{\frac{\beta+1}{\beta} \sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1))\right\}} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Из (24) вытекает, что

$$b_n^{(\alpha)} = \exp\left\{\frac{\beta+1}{\beta} \sqrt[\beta+1]{c\beta n^\beta}(1+o(1))\right\}, \quad n \to +\infty,$$

откуда ввиду того, что $\beta = 1+\alpha$, следует соотношение (19) леммы.

Перейдем к доказательству сформулированной вначале теоремы. Предположим, что функция (2) принадлежит классу $A_\alpha (-1 < \alpha \leqslant 0)$. Воспользовавшись неравенством Коши и имея в виду лемму 1 для функции (2), можем написать

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\} \cdot r^{-n}, \quad 0 < r < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Найдем минимум функций

$$y_n(r) = \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\} r^{-n}$$

при $0 < r < 1$.

Приравнивая производную функций $y_n(r)$ к нулю, приходим к уравнению

$$c_\alpha(1+\alpha)r - n(1-r)^{\alpha+2} = 0. \tag{26}$$

Покажем, что для любого натурального n уравнение (26) имеет единственное решение в промежутке $(0, 1)$.

Действительно, функция $g(r) = c_\alpha(1+\alpha)r - n(1-r)^{\alpha+2}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а на его концах $g(0) = -n < 0$, $g(1) = c_\alpha(1+\alpha) > 0$, и поэтому она принимает нулевое значение внутри отрезка. Так как $g'(r) = c_\alpha(1+\alpha) + n(\alpha+2)(1-r)^{1+\alpha} > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, то функция $g(r)$ монотонно возрастает и уравнение (26) имеет единственное решение $r = r_n \in (0, 1)$. Из (26) следует, что, если $n \to +\infty$, то $r_n \to 1$. Имея в виду асимптотическое значение r_n, из (26) можем написать

$$1 - r_n = \sqrt[\alpha+2]{\frac{c_\alpha(1+\alpha)}{n}}(1+o(1)). \tag{27}$$

Учитывая, что $\ln r_n \sim -(1-r_n)$, $n \to +\infty$ и принимая во внимание (25), получим

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r_n)^{1+\alpha}} + n(1-r_n)\right\}. \qquad (28)$$

Подставив значение $1-r_n$ из (27) в (28), окончательно получим (3).

Из леммы 4 следует, что оценку (3) улучшить нельзя.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Ռ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

A_α դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների լավագույն գնահատականի մասին

Միասնար շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների դասերին նվիրված աշխատանքներից է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սահմանված $A_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ դասը, որը հանդիսանում է Ա. Օստրովսկու $A=A_0$ դասի բնական ընդհանրացումը։

Հայտնի է նաև, որ $A_\alpha \subset A_0(-1<\alpha<0)$, $A_0 \subset A_\alpha(0<\alpha<\infty)$։

Ներկա աշխատանքի նպատակն է ստանալ $A_\alpha(-1<\alpha\leqslant 0)$ դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար լավագույն գնահատականն՝ կախված α-ից։ A դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար հայտնի է Ս. Ն. Մերգելյանի կողմից ստացված լավագույն գնահատականը՝

$$|a_n| \leqslant \exp\left|2\sqrt{cn}(1+o(1))\right|, \quad n \to +\infty,$$

որը բնականորեն չի կարող ճշգրիտ լինել $A_\alpha(-1<\alpha<0)$ դասի ֆունկցիաների համար։

$A_\alpha(-1<\alpha\leqslant 0)$ դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար ստացված է հետևյալ գնահատականը՝

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\}, \quad n \to +\infty:$$

Ապացուցված է, որ այդ գնահատականը լավացնել հնարավոր չէ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [2] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, Наука, М.—Л., 1950. [3] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, ДАН СССР, т. 173, № 6 (1967). [4] *А. О. Гельфонд*, Исчисление конечных разностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

Учитывая, что $\ln r_n \sim -(1-r_n)$, $n \to +\infty$ и принимая во внимание (25), получим

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r_n)^{1+\alpha}} + n(1-r_n)\right\}. \qquad (28)$$

Подставив значение $1-r_n$ из (27) в (28), окончательно получим (3).

Из леммы 4 следует, что оценку (3) улучшить нельзя.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Ս. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

A_α դասի ֆունկցիաների բեյլորյան գործակիցների լավագույն գնահատականի մասին

Միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիանների դասերին նվիրված աշխատանքներից է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սահմանված $A_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ դասը, որը հանդիսանում է Ա. Օստրովսկու $A=A_0$ դասի բնական ընդհանրացումը։

Հայտնի է նաև, որ $A_\alpha \subset A_0(-1<\alpha<0)$, $A_0 \subset A_\alpha(0<\alpha<\infty)$։

Ներկա աշխատանքի նպատակն է ստանալ $A_\alpha(-1<\alpha\leqslant 0)$ դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար լավագույն գնահատականը՝ կախված α-ից։ A դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար հայտնի է Ս. Ն. Մերգելյանի կողմից ստացված լավագույն գնահատականը՝

$$|a_n| \leqslant \exp\{2\sqrt{cn}(1+o(1))\}, \quad n \to +\infty,$$

որը բնականորեն չի կարող ճշգրիտ լինել $A_\alpha(-1<\alpha<0)$ դասի ֆունկցիաների համար։

$A_\alpha(-1<\alpha\leqslant 0)$ դասի ֆունկցիաների թեյլորյան գործակիցների համար ստացված է հետևյալ գնահատականը՝

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\,(1+o(1))\right\}, \quad n \to +\infty:$$

Ապացուցված է, որ այդ գնահատականը լավացնել հնարավոր չէ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [2] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, Наука, М.—Л., 1950. [3] *М. М. Джрбашян, В. С. Захарян*, ДАН СССР, т. 173, № 6 (1967). [4] *А. О. Гельфонд*, Исчисление конечных разностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.