ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 3

УДК 519.21.7

МАТЕМАТИКА

В. В. Сарафян

Об асимптотике первого собственного значения эллиптического оператора с малым параметром

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 13/I 1982)

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L^{\varepsilon}u(x)=(\varepsilon L_1+L_0)u(x)=\lambda u(x) \quad x\in D\subset R^r \tag{1}$$

$$u(x)|_{\partial D}=0.$$

Здесь

$$L_1=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}a^{ij}(x)\frac{\partial^r}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{r}b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$L_0=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}A^{ij}(x)\frac{\partial^r}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{r}B^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

D—ограниченная область в R^r с достаточно гладкой границей ∂D. Коэффициенты предполагаются достаточно гладкими, например заведомо достаточно считать их дважды непрерывно дифференцируемыми. Оператор L_1 предполагается строго эллиптическим, форма $\sum_{i,j=1}^{r} A^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ неотрицательно определена, в частности, оператор L_0 может вырождаться в оператор первого порядка. Цель этой заметки изучить поведение первого собственного значения λ^{ε} задачи (1) при $\varepsilon\to 0$.

Как известно ([1]), существует отрицательное собственоое значение задачи (1), превосходящее вещественные части всех остальных собственных значений этой задачи. Это собственное значение однократно, соответствующая собственная функция положительна при $x\in D$.

В случае, когда L_0—оператор первого порядка, этим вопросам посвящено много работ (см. например, ([2,3])). В этом случае важнейшую роль играет поведение характеристик оператора L_0 ([4]). В частности, если выполнено условие Левинсона ([5]), т. е. характеристики оператора L_0, начинающиеся в области D, выходят из области D и пересекают границу ∂D достаточно правильным образом, то $-\lambda^{\varepsilon}\to+$ $+\infty$ при $\varepsilon\to 0$ ([2]).

Естественно считать, что первое собственное значение задачи $L_0u=\lambda u$ равно $+\infty$, так что в этом случае есть в определенном смысле непрерывная зависимость от параметра ε.

Если оператор L_0 содержит вторые производные, то роль характеристик вырожденной задачи играет марковский процесс x_t^0, управляемый оператором L_0 ([6]). Обобщенное условие Левинсона будет состоять в том, что траектории процесса x_t^0 с вероятностью 1, исходя из $x \in D$, выходят из области D достаточно регулярным образом.

Мы не будем стремиться к максимальной общности и введем точную формулировку обобщенного условия Левинсона не в максимальной общности, но зато в терминах коэффициентов.

Мы говорим, что выполняется обобщенное условие Левинсона (в ограниченной области D для оператора L_0), если:

1) хотя бы один коэффициент оператора L_0 отличен от нуля в $D \cup \partial D$;

2) границу ∂D можно разбить на три компоненты $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cup \Gamma_3$ ($\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ не пусто), причем компоненты Γ_1 и Γ_2 являются замыканием своих внутренних (относительно ∂D) точек. Предполагается, что на Γ_1 и Γ_2 диффузия (процесса x_t^0) по нормали $n(x)$ к границе равна нулю, т. е. $\sum_{i,j=1}^{r} A^{ij}(x) n_i(x) n_j(x)|_{x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$, и выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{r} B^i(x) n_i(x)|_{x \in \Gamma_1} < 0, \quad \sum_{i=1}^{r} B^i(x) n_i(x)|_{x \in \Gamma_2} > 0,$$

где $\{n_i(x)\}$—направляющие косинусы внешней нормали в точке $x \in \partial D$ или нормали к границе опорного полупространства, если x—точка негладкости. При $x \in \Gamma_3$ диффузия по нормали не вырождается и

$$\sum_{i,j=1}^{r} A^{ij}(x) n_i(x) n_j(x)|_{x \in \Gamma_3} > a > 0.$$

Сравнивая траектории процесса x_t^ε, соответствующего оператору L^ε, и процесса x_t^0, можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть для оператора L_0 в области D выполняется обобщенное условие Левинсона, $\psi(x)$ непрерывная функция на ∂D. Тогда решение $u^\varepsilon(x)$ задачи Дирихле*

$$L^\varepsilon u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in D, \quad u^\varepsilon(x)|_{\partial D} = \psi(x)$$

при $\varepsilon \to 0$ сходится к обобщенному решению задачи*

$$L_0 u^0(x) = 0, \quad x \in D, \quad u^0(x)|_{x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3} = \psi(x). \tag{2}$$

Задача (2) *имеет единственное обобщенное решение.*

Если L_0 оператор первого порядка, то лемма 1 переходит в известный результат Левинсона ([5]).

Чтобы двигаться дальше, нам необходимо ввести аналог первого собственного значения для оператора L_0. Обозначим

$$\tau^\varepsilon = \inf\{t : x_t^\varepsilon \notin D\}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

* Под обобщенным решением задачи (2) мы понимаем функцию $u(x)$, принимающую граничные значения на $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и удовлетворяющую уравнению $Au(x) = 0$, где A—инфинитезимальный оператор процесса $\tilde{x}_t^0$, полученного из x_t^0 путем остановки на ∂D.

Изучая полугруппу, соответствующую процессам x_t^ε, $\varepsilon\geqslant 0$, можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *При $\varepsilon\geqslant 0$ существует (быть может бесконечный, если $\varepsilon=0$) предел*

$$\varkappa^\varepsilon=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sup_{x\in D}\ln P_x\{\tau^\varepsilon>t\}\geqslant 0.$$

Если $\varepsilon>0$, то $\varkappa^\varepsilon=-\lambda^\varepsilon$. При $\varepsilon=0$ этот предел строго положителен, если выполняется обобщенное условие Левинсона.

Число $\varkappa^0$ мы будем называть (обобщенным) наибольшим собственным значением оператора L_0 в области D.

Если L_0 оператор первого порядка и выполняются условия Левинсона, то $\varkappa^0=+\infty$. Ниже мы приведем пример вычисления $\varkappa^0$ для оператора L_0, содержащего вторые производные.

Оказывается, что в отличие от случая первого порядка $-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon$ вообще говоря отличен от $\varkappa^0$. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $D=\{(x,\ y)\in R^2,\ \ |x|<1,\ |y|<1\}$, $L_1=\frac{1}{2}\Delta$, $L_0=\frac{\beta}{2}\frac{\partial_2}{\partial x^2}+$ $+\alpha y\frac{\partial}{\partial y}$, $\beta>0$, $\alpha>0$. Так как выход из области D, исходя из точек оси x, происходит только за счет движения по оси x, то $\varkappa^0$ легко вычисляется, и получаем $\varkappa^0=\frac{\beta\pi^2}{8}$. С помощью результатов из теории уравнений вырожденных гипергеометрических функций (см., например, (⁷), там же дальнейшие ссылки) можно доказать, что $-\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon>$ $>\alpha$. Отсюда заключаем, что $-\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon>\varkappa^0$, если α достаточно велико.

В общем случае справедлива следующая

Теорема 1. *Предположим, что для оператора L_0 в области D выполняются обобщенные условия Левинсона. Тогда*

$$\varkappa^0\leqslant-\varliminf_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon.$$

Предположим, кроме того, что для всякого $\delta>0$ можно указать область V_δ, принадлежащую D вместе с замыканием, и число C_δ такие, что

$$P_y\{\tau^0>t,\ x_t^0\in V_\delta\}>C_\delta e^{-(\varkappa^0+\delta)t}$$

при $y\in V_\delta$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon=-\varkappa^0.$$

Доказательство использует представление λ^ε, даваемое леммой 2, и оценки распределения случайной величины τ^ε, $\varepsilon\geqslant 0$, вытекающие из свойств процесса x_t^ε.

Для проверки условий теоремы 1 полезна следующая

Лемма 3. *Предположим, что оператор L_0 не вырожден в замыкании области G, граница ∂G принадлежит классу C^3, $\tau_G=$*

$=\inf\{t : x_t \notin G\}$. *Тогда существует строго положительная мера* $m(E)$, $E\subset G$, *такая, что*

$$P_x\{\tau_G>t,\ \ x_t\in E\}>m(E)v(x)e^{-\lambda^0 t},$$

где λ^0*—первое собственное значение задачи* $L_0 v=\lambda v$, $x\in G$, $v(x)|_{\partial G}=0$, $v(x)$*—соответствующая (строго положительная) собственная функция.*

Վ. Վ. ՍԱՐԱՖՅԱՆ

Փոքր պարամետրով էլիպտիկ օպերատորների առաջին սեփական արժեքի ասիմպտոտիկայի մասին

Դիտարկենք սեփական արժեքների վերաբերյալ հետևյալ խնդիրը.

$$\varepsilon(L_1+L_0)u(x)=\lambda u(x),\quad x\in D;\quad u(x)|_{\partial D}=0 \tag{1}$$

Ենթադրվում է, որ D *ողորկ եզրագծով սահմանափակ տիրույթ է, և* L_1 *օպերատորը խիստ էլիպտիկ է* D*-ում, իսկ* L_0*-ն՝ վերասերված էլիպտիկ օպերատոր է։*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է (1) խնդրի առաջին սեփական արժեքի վարքը, երբ $\varepsilon\to 0$*։ Եթե օպերատորով ղեկավարվող մարկովյան պրոցեսի հետագծերը 1 հավանականությամբ դուրս են գալիս* D*-ից բավական ռեգուլյար կերպով (Լևինսոնի ընդհանրացված պայմանը), ապա որոշակի պայմանների դեպքում հաշված է* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda^{\varepsilon}$ *սահմանը, որը խիստ դրական է։*

Ապացույցը տարվում է հավանականային մեթոդների օգնությամբ, օգտագործելով դիֆերենցիալ հավասարումների և մարկովյան պրոցեսների միջև եղած կապը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. Хилле, Р. С. Филлипс,* Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962. [2] *А. Д. Вентцель,* Теория вероятностей и ее применения, т. 20, № 3 (1975). [3] *A. Devinatz, R. Ellis, A. Friedman,* Indiana Univ. Math: J., 991—1011, 1973/74. [4] *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин,* Флуктации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, Наука, М., 1979. [5] *N. Levinson,* Annals of Math., vol. 51, № 2 (1950). [6] *Е. Б. Дынкин,* Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963. [7] *З. А. Коддингтон, Н. Левинсон,* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.