ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 3

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

Г. Р. Погосян

# Об одном классе неисправностей логических устройств и сложности проверяющего теста

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 14/I 1982)

Предлагаемая работа относится к сравнительно молодой области дискретной математики — теории тестов. Понятие теста было введено С. В. Яблонским [1] в 1958 г. и легло в основу нового комбинаторно-логического подхода к решению задач контроля работы управляющих систем. Идея метода сводится не к проверке внутренней структуры, узлов и аппаратов данного устройства, а к проверке реализуемой им функции, точнее к логическому анализу результата реализации некоторого множества входной информации, называемого тестом. При этом очевидно, что эффективность метода будет зависеть от метрических свойств теста.

В настоящей работе исследуются логические устройства, реализующие функции алгебры логики. Изучается один класс неисправностей входов устройства, называемый классом инверсий. Неисправность входного контакта в этом случае означает, что вместо поданного на соответствующий вход значения $\alpha$ устройство принимает его отрицание $\bar{\alpha}$. Описывается поведение функции Шеннона для длины теста, проверяющего наличие указанных неисправностей. Проводится количественный и качественный анализ свойств функций, инвариантных (а также неинвариантных) относительно некоторой совокупности неисправностей.

Отметим, что задача описания поведения функции Шеннона для класса инверсий ранее не была исследована, тогда как для классов подстановки констант [2] и дизъюнктных слипаний [3] имеются определенные результаты.

Перейдем к точным понятиям. Пусть $P_2^n$—множество всех функций алгебры логики, зависящих от $n$ переменных из алфавита $X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Положим $E_2=\{0, 1\}$, $E_2^n$—множество всех наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in E_2$, $i=1, 2, \ldots, n$. Пусть $F$—некоторое множество преобразований $\varphi: E_2^n \to E_2^n$, называемых ошибками.

Подмножество $T$ множества $E_2^n$ называется проверяющим тестом функции $f \in P_2^n$ для класса ошибок $F$, если для любой ошибки $\varphi \in F$

либо выполнено $f(\tilde{\alpha})=f(\varphi(\tilde{\alpha}))$ для всех наборов $\tilde{\alpha}\in E_2^n$, либо существует набор $\tilde{\beta}$ из $T$ такой, что $f(\tilde{\beta})\neq f(\varphi(\tilde{\beta}))$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(f, F)$ множество всех тестов функции $f$ для класса ошибок $F$. Положим $L(f, F)=\min\limits_{T\in\mathfrak{M}(f, F)} |T|$, где $|A|$ означает число элементов в множестве $A$

Тест $T\in\mathfrak{M}(f, F)$ называется минимальным, если $|T|=L(f, F)$.

Положим $L(n, F)=\max\limits_{f\in P_2^n} L(f, F)$.

Пусть $In=\{\varphi_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma}\in E_2^n, \ \forall\tilde{\alpha}\in E_2^n(\varphi_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\alpha})=\tilde{\alpha}\oplus\tilde{\sigma})\}$, где $\oplus$ есть покоординатное сложение по mod 2. Введем на множестве $In$ операции суммы и умножения на число, полагая $\varphi_{\tilde{\sigma}_1}+\varphi_{\tilde{\sigma}_2}=\varphi_{\tilde{\sigma}_1\oplus\tilde{\sigma}_2}$ и $\alpha\cdot\varphi_{\tilde{\sigma}}=\varphi_{\alpha\cdot\tilde{\sigma}}$. Нетрудно видеть, что множество $In$ с указанными операциями образует линейное пространство размерности $n$ над полем вычетов по mod 2. Пусть $\tilde{O}\in E_2^n$: $\tilde{O}=(0, \ldots, 0)$. Положим $F_{In}=In\setminus\{\varphi_{\tilde{0}}\}$.

Теорема 1. *Для любого* $n\geqslant 1$ *имеет место*

$$2\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\leqslant L(n, F_{In})\leqslant n.$$

Здесь через $[c]$ обозначено наибольшее целое число $a$ такое, что $a\leqslant c$.

Ниже сформулируем леммы, дающие общее представление о схеме доказательства теоремы 1.

Пусть $f\in P_2^n$ и $A\subseteq E_2^n$. Положим по определению

$$U(\tilde{\alpha}, f)=\{\varphi\in F_{In} : f(\tilde{\alpha})=f(\varphi(\tilde{\alpha}))\} \text{ и } U(A, f)=\bigcap_{\tilde{\alpha}\in A} U(\tilde{\alpha}, f).$$

Лемма 1. *Для любой функции* $f\in P_2^n$ *и любого подмножества* $A\subseteq E_2^n$, *если выполнено* $U(A, f)\setminus(E_2^n, f)\neq\varnothing$, *то существует такое подмножество* $B\subseteq E_2^n$, *что* $|B|=|A|+1$ *и имеет место*

$$|U(B, f)|\leqslant\frac{1}{2}|U(A, f)|.$$

Основываясь на лемме 1, устанавливают верхнюю оценку для функции $L(n, F_{In})$.

Лемма 2. *Для любого* $n\geqslant 1$ *имеет место* $L(n, F_{In})\leqslant n$.

Пусть $n=2m+1$. Положим $h^{2m+1}(x_1, \ldots, x_n)=x_{2m+1}\oplus\sum\limits_{i=1}^{m}{}' x_i\& x_{m+i}$,

где $\sum'$ есть сумма по mod 2.

Лемма 3. *Для функции* $h^{2m+1}$ *имеет место* $L(h^{2m+1}, F_{In})\geqslant n$.

Если $n=2m$, то полагаем $h^{2m}(x_1, \ldots, x_n)=x_n\& h^{2m-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Лемма 4. *Для функции* $h^{2m}$ *имеет место* $L(h^{2m}, F_{In})\geqslant n-1$.

Выделим подкласс класса $F_{In}$, состоящий из наиболее вероятных на практике ошибок, называемых одиночными ошибками. Обозначим через $\tilde{e}_i$ такой набор из $E_2^n$, у которого $i$-тая координата равна 1, а все остальные равны 0. Пусть $F_{In}(1)=\{\varphi_{\tilde{e}_1}, \ldots, \varphi_{\tilde{e}_n}\}$.

Теорема 2. *Для любого* $n\geqslant 1$ *имеет место*

$$L(n, F_{ln}(1)) = n-t,$$

*где $t$ определяется из $2^{t-1}+t \leqslant n \leqslant 2^t+t$.*

Замечание. Утверждение теоремы 2 верно для произвольного базиса линейного пространства $ln$.

Основная сложность доказательства теоремы 2 заключается в установлении верхней оценки для функции $L(n, F_{ln}(1))$. Для этой цели вводится ряд вспомогательных понятий и доказываются леммы. Для установления факта $L(n, F_{ln}(1)) \geqslant n-t$ в доказательстве теоремы используется функция, имеющая самый длинный минимальный тест для класса ошибок $F_{ln}(1)$. Приведем пример такой функции.

Пусть $2^{t-1}+t \leqslant n \leqslant 2^t+t$. Положим

$$h_1^n(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=t+1}^{n} x_i \& x_1^{\alpha_1^i} \& \ldots \& x_t^{\alpha_t^i}, \text{ где}$$

$$\alpha_1^i + 2\alpha_2^i + \ldots + 2^{t-1} \cdot \alpha_t^i = i-(t+1).$$

Лемма. 6. *Для функции $h_1^n$ имеет место*

$$L(h_1^n, F_{ln}(1)) = L(n, F_{ln}(1)).$$

Функция $f \in P_2^n$ называется инвариантной относительно ошибки $\varphi \in F$, если для любого набора $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ имеет место $f(\tilde{\alpha}) = f(\varphi(\tilde{\alpha}))$, в противном случае функция $f$ называется чувствительной к ошибке $\varphi$.

Говорят, что некоторое свойство выполнено для почти всех функций из множества $P_2^n$, если доля функций из $P_2^n$, для которых это свойство не выполнено, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Утверждение 1. При $n \to \infty$ почти все функции из $P_2^n$ являются чувствительными ко всем ошибкам из класса $F_{ln}$.

Нетрудно видеть, что функция из $P_2^n$ инвариантна относительно всех ошибок из $F_{ln}$ тогда и только тогда, когда она тождественно равна константе.

Утверждение 2. Если функция $f$ алгебры логики инвариантна относительно некоторого подмножества $F$ ошибок из класса $F_{ln}$, то она инвариантна относительно подпространства пространства $ln$, натянутого на множество $F$.

Обозначим через $\Phi(f)$ множество всех ошибок из $ln$, относительно которых $f$ инвариантна. Из утверждения 2 следует, что $\Phi(f)$ образует подпространство линейного пространства $ln$.

Утверждение 3. Пусть $f \in P_2^n$, тогда размерность пространства $\Phi(f)$ равна $r$ тогда и только тогда, когда существует функция $g \in P_2^{n-r}$, существенно зависящая от всех переменных, такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(\alpha_1^1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n^1 x_n, \ldots, \alpha_1^{n-r} x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n^{n-r} x_n)$, причем матрица $\|\alpha_i^j\|$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n-r$, $\alpha_i^j \in E_2$ имеет ранг $n-r$.

В заключение автор выражает благодарность В. Б. Кудрявцеву за внимание к работе.

Вычислительный центр Академии наук СССР

Հ. Ռ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

## Տրամաբանական սարքերի անսարքությունների մի դասի և ստուգող տեստի բարդության մասին

*Դիտարկվում են բուլյան ֆունկցիա իրացնող տրամաբանական սարքեր, որոնց մուտքերը կարող են ունենալ «ինվերսիա» տիպի անսարքություններ։ Այդպիսի անսարքություններ ունեցող սարքը իրացնում է նոր ֆունկցիա, որը ստացվում է նախկինից՝ նրա որոշ փոփոխականների ժխտման միջոցով։ Դիտարկվում է Շեննոնի ֆունկցիան, որը որոշում է մինիմալ ստուգող տեստի հզորությունը որոշակի իմաստով ամենաբարդ սարքի դեպքում։ Նկարագրըվում է Շեննոնի ֆունկցիայի վարքը։ Առանձին դիտարկվում են միավոր անսարքությունները, որոնց դեպքում տրվում է Շեննոնի ֆուկցիայի համար ստույգ բանաձև։ Քննարկվում են այն ֆունկցիաների (սարքերի) հատկությունները, որոնք ինվարիանտ են տվյալ ձևափոխությունների (անսարքությունների) նկատմամբ։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. А. Чегис, С. В. Яблонский,* Труды МИАН, т. 51 (1958). [2] *В. Н. Носков,* Мат. заметки, т. 18, № 1 (1975). [3] *Г. Р. Погосян,* в сб.: Дискретная математика и математическая кибернетика, Вопросы кибернетики, АН СССР, 1982.