ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 2

УДК 539.376

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Академик АН Армянской ССР **Н. Х. Арутюнян, В. В. Метлов**

Об одной задаче теории ползучести стареющих тел с изменяющейся границей

(Представлено 18/I 1982)

Рассмотрена плоская задача о наращивании бесконечного клина, нагруженного силой, приложенной к его вершине. Материал наращиваемого клина обладает свойствами ползучести и старения, в силу чего наращиваемый клин находится в условиях специфической неоднородности, обусловленной различным возрастом его элементов ([1,2]).

Пусть в момент времени $t=0$ изготавливается бесконечный клин $\Omega_0=\{0\leqslant r<\infty, -\alpha_0\leqslant\theta\leqslant\alpha_0\}$ с углом раствора $2\alpha_0$, где r, θ—полярные координаты на плоскости. Одновременно к клину Ω_0 в его вершине прикладывается сила $\mathbf{P}_0$, рассчитанная на единицу его толщины. Начиная с момента времени $t=0$ происходит непрерывное наращивание клина по заданному закону

$$\Omega(t)=\{0<r<\infty, \ -\alpha_1(t)<\theta<\alpha_2(t)\},$$

где $\alpha_i(t)$, $i=1, 2$—положительные непрерывные монотонно возрастающие на отрезке $[0, T]$ функции, такие, что $\alpha_i(0)=\alpha_0$, $\alpha_i(T)\leqslant\pi$, $i=1, 2$. При этом сила изменяется по закону $\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$. В момент времени T наращивание прекращается, и функции $\alpha_i(t)$ остаются далее постоянными

$$\alpha_i(t)=\alpha_i(T) \text{ при } t\geqslant T, \ i=1, 2.$$

Требуется определить поле напряжений и деформаций в наращиваемом клине для всех $t\geqslant 0$. Мы будем считать, что функция $\mathbf{P}(t)$—кусочно-непрерывна при $t\geqslant 0$. Для определенности будем считать ее непрерывной слева, а правосторонний предел функции $\mathbf{P}(t)$ в точке t обозначим символом $\mathbf{P}(t+)$, так что $\mathbf{P}(0)=0$, $\mathbf{P}(0+)=\mathbf{P}_0$. Множество точек разрыва функции $\mathbf{P}(t)$ на отрезке $[0, T]$ обозначим символом S. Величину разрыва функции $\mathbf{P}(t)$ в точке $t\in S$ обозначим через $\Delta\mathbf{P}(t)$, так что $\Delta\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t+)-\mathbf{P}(t)$. Аналогичные обозначения принимаем также для компонент напряжений и деформаций. Введем функцию $\tau^*(\theta)$ на отрезке $[-\alpha_1(T), \alpha_2(T)]$, равную моменту зарождения слоя наращиваемого клина с координатой θ. При $\theta\in[-\alpha_0, \alpha_0]$ $\tau^*(\theta)=0$, а при $\theta\in[-\alpha_1(T), -\alpha_0[$ и $\theta\in]\alpha_0, \alpha_2(T)]$ функция $\tau^*(\theta)$ совпадает с функциями, обратными к $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$.

Согласно ([1]) средние значения компонент напряжений и деформаций по толщине клина, обозначаемые символами $\sigma_{\alpha\beta}(t, r, \theta)$ и

$\varepsilon_{\alpha\beta}(t, r, \theta)$, $\alpha, \beta = r, \theta$, удовлетворяют следующим уравнениям и условиям.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0, \quad (r, \theta)\in\Omega(t), \quad t \geqslant 0; \tag{1}$$

уравнение состояния, записанное в форме интеграла Стильтьеса,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\hat{\Delta}_1\sigma_{\gamma\gamma} + \hat{\Delta}_2\sigma_{\alpha\beta}, \quad t \geqslant \tau^*(\theta), \tag{2}$$

где символом $\hat{\Delta}_i$ обозначен интегральный оператор, действующий по правилу

$$\hat{\Delta}_i\varphi(t, r, \theta) = \int\limits_{\tau^*(\theta)}^{t} \Delta_i(t - \tau^*(\theta), \tau - \tau^*(\theta))d\varphi(\tau, r, \theta), \quad i = 1, 2,$$

$$d\varphi(\tau, r, \theta) = \dot{\varphi}(\tau, r, \theta)d\tau, \quad \dot{\varphi}(t, r, \theta) = \frac{\partial\varphi(t, r, \theta)}{\partial t};$$

уравнение совместности для скоростей деформаций

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\partial r}\right) - \frac{\partial\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} = \frac{2}{r}\frac{\partial^2(r\dot{\varepsilon}_{r\theta})}{\partial r\partial\theta},$$

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t}, \quad t \geqslant \tau^*(\theta). \tag{3}$$

Здесь ввиду мгновенных приращений компонент напряжений и деформаций, вызванных мгновенными приращениями нагрузки $\mathbf{P}(t)$, частные производные по времени понимаются в обобщенном смысле. В частности, уравнение совместности скоростей деформаций (3) при $t\in S$ означает совместность приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$. Запишем условие равенства нулю компонент напряжений в элементе наращиваемого тела в момент его зарождения

$$\sigma_{\alpha\beta}(\tau^*(\theta), r, \theta) = 0. \tag{4}$$

Поскольку движущаяся граница

$$\Gamma(t) = \{0 < r < \infty, \ \theta = -\alpha_1(t)\} \cup \{0 < r < \infty, \ \theta = \alpha_2(t)\}$$

области $\Omega(t)$ совпадает при $0 < t \leqslant T$ с линиями уровня $\{\tau^*(\theta) = t\}$ функции $\tau^*(\theta)$, то из (4) вытекает, что

$$\sigma_{\alpha\beta}(t, t, \theta)|_{(r,\theta)\in\Gamma(t)} = 0, \quad 0 < t \leqslant T. \tag{5}$$

Если в процессе непрерывного наращивания происходит мгновенное изменение нагрузки, то в только что родившемся элементе возникают напряжения, однако вектор напряжения на движущейся поверхности равен нулю, т. е. имеем

$$\sigma_{r\theta}(t+, r, \theta)|_{(r,\theta)\in\Gamma(t)} = \sigma_{\theta\theta}(t+, r, \theta)|_{(r,\theta)\in\Gamma(t)} = 0, \quad t\in S. \tag{6}$$

Наконец, при $t>T$ будем иметь граничное условие

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta\theta}=0,\ (r,\ \theta)\in\Gamma(T),\ t>T. \tag{7}$$

Помимо перечисленных соотношений необходимо удовлетворить интегральным уравнениям равновесия

$$\int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} r^2\sigma_{\theta r}(t,\ r,\ \theta)d\theta=0, \quad \int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} (\sigma_{rr}\sin\theta+\sigma_{r\theta}\cos\theta)rd\theta=-P_2(t),$$

$$\int\limits_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} (\sigma_{rr}\cos\theta-\sigma_{r\theta}\sin\theta)\cdot rd\theta=-P_1(t), \quad t\geqslant 0, \tag{8}$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$—составляющие вектора $\mathbf{P}(t)$.

Решение задачи (1)—(8) построим следующим образом ([3]). Положим равными нулю все компоненты напряжений, кроме σ_{rr}, которую будем искать в форме

$$\sigma_{rr}(t,\ r,\ \theta)=-\frac{F(t,\ \theta)}{r}, \tag{9}$$

где $F(t,\ \theta)$—некоторая функция, подлежащая определению. При этом будут тождественно удовлетворены дифференциальные уравнения равновесия (1), первое из уравнений (8), а также граничные условия (6) и (7). Из (9) и (2) найдем

$$\varepsilon_{r\theta}=0,\ \dot{\varepsilon}_{rr}=\frac{\dot{C}_r(t,\ \theta)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}=\frac{\dot{C}_\theta(t,\ \theta)}{r}, \tag{10}$$

$$C_r(t,\ \theta)=-(\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2)F(t,\ \theta), \quad C_\theta(t,\ \theta)=-\hat{\Delta}_1F(t,\ \theta). \tag{11}$$

Подставляя (10) в (3), получим

$$\frac{\partial^2\dot{C}_r}{\partial\theta^2}+\dot{C}_r=0,$$

откуда находим

$$\dot{C}_r(t,\ \theta)=a_1(t)\cos\theta+a_2(t)\sin\theta. \tag{12}$$

После обращения первого из соотношений (11) с учетом (4) получим

$$F(t,\ \theta)=-\hat{\mu}C_r(t,\ \theta)=-\int\limits_{\tau^*(\theta)}^{t}\mu(t-\tau^*(\theta),\ \tau-\tau^*(\theta))\cdot\dot{C}_r(\tau,\ \theta)d\tau,$$

$$\hat{\mu}=(\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2)^{-1}. \tag{13}$$

Здесь функция $\mu(t,\ \tau)$ есть (как и $\Delta_1(t,\ \tau)$, $\Delta_2(t,\ \tau)$) заданная реологическая характеристика материала, равная продольному напряжению в момент времени t при одноосном напряженном состоянии однородного тела при воздействии единичной продольной деформации, приложенной в возрасте τ.

Подставляя (12) в (13), выражение (13) для функции $F(t,\ \theta)$ в (9), а затем значение σ_{rr} в интегральные уравнения равновесия (8), после замены порядка интегрирования получим систему двух интегральных уравнений Вольтерра для определения неизвестных функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$

$$\int\limits_0^t \tilde{\mu}(t, \tau)\boldsymbol{a}(\tau)d\tau = \mathbf{P}(t), \tag{14}$$

$$\tilde{\mu}(t, \tau) = \int\limits_{-a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \mu(t-\tau^*(\theta), \tau-\tau^*(\theta))A(\theta)d\theta. \tag{15}$$

Здесь матрица $A(\theta)$ и векторы $\boldsymbol{a}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ определяются соотношениями

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача нахождения поля напряжений и деформаций в наращиваемом клине свелась к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра (14). Пусть $S=\{t_i, i=1, \ldots N\}$. Тогда решение системы (14) можно представить в виде

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}_{\text{reg}}(t) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{C}_i \delta(t-t_i), \quad \mathbf{C}_i = \tilde{\mu}(t_i, t_i)^{-1}\Delta\mathbf{P}(t_i),$$

$$\int\limits_0^t \tilde{\mu}(t, \tau)\boldsymbol{a}_{\text{reg}}(\tau)d\tau + \sum_{t_i<t} \tilde{\mu}(t, t_i)\mathbf{C}_i = \mathbf{P}(t),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, $\boldsymbol{a}_{\text{reg}}(t)$ — регулярная часть $\boldsymbol{a}(t)$.

В случае симметричного наращивания имеем

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad \tau^*(\theta) = \tau^*(-\theta),$$

и согласно (15) матрица $\tilde{\mu}(t, \tau)$ будет диагональной, т. е. система (14) распадается на два независимых уравнения.

При проведении численного моделирования с использованием реологических характеристик бетона исследовалось влияние скорости процесса наращивания (при неизменной последовательности возведения-загружения, т. е. неизменной зависимости силы $\mathbf{P}$ от угла α) на поле напряжений в наращиваемом клине. Процесс перераспределения напряжений в наращиваемом теле определяется рядом факторов. Во-первых, упругие свойства приводят к приращению напряжений одновременно во всех элементах наращиваемого тела при приращении внешней нагрузки, и при отсутствии свойства ползучести у наращиваемого тела скорость возведения-загружения не влияет на окончательное распределение напряжений. Ползучесть материала приводит к передаче части усилия от ранее рожденных элементов на вновь рожденные. Так, например, при постоянной во времени силе $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$ вследствие ползучести происходит разгрузка исходного тела Ω_0, которая компенсируется увеличением напряжений во вновь родившихся элементах. Наконец, старение материала приводит к возрастной неоднородности, состоящей в большей жесткости (меньшей деформативности) ранее зародившихся элементов по сравнению со вновь рожденными, что уменьшает процесс разгрузки ранее рожденных элементов. Рассмотренные факторы приводят к существенной и немонотонной зависимости максимального напряжения в наращиваемом клине от скорости возведения-загружения.

Институт проблем механики
Академии наук СССР

Հայկական ՍՍՀ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Վ. Վ. ՄԵՏԼՈՎ

Փոփոխվող եզրագծով ծերացող մարմինների սողքի տեսության մի խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է անվերջ, աճող սեպի մասին հարթ խնդիրը, երբ սեպը բեռնավորված է գագաթի վրա կիրառված ուժով։ Աճող սեպի նյութը օժտված է սողքի և ծերացման հատկություններով, որի պատճառով սեպը գտնվում է իր մասերի տարբեր հասակներ ունենալու անհամասեռության պայմաններում։

Խնդրի լուծումը բերվում է Վոլտերայի տիպի երկու ինտեգրալ հավասարումներից կազմված սիստեմի լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 41, вып. 5 (1977). [2] *Н. Х. Арутюнян*, ДАН СССР, т. 229, № 3 (1976). [3] *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, Наука, М., 1977.