ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 2

УДК 539.374

МЕХАНИКА

Н. Б. Сафарян

Плоские динамические задачи пластически-неоднородных тел со степенным упрочнением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/XII 1981)

Напряженное состояние в пластически-неоднородных телах при динамических воздействиях впервые исследовано в работах Х. А. Рахматулина [1,2], в которых исходя из идеально-пластической схемы предел текучести принимается переменным по длине цилиндрического стержня. Этому направлению посвящены также исследования [3–9], где в основном рассматриваются идеально-пластические и линейно-упрочняющиеся среды при различных граничных и начальных условиях. Подробный анализ исследования динамических задач пластически-неоднородных тел дан в обзорных статьях Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро [10], Н. Кристеску [11], в монографии В. Ольшака, Я. Рыхлевского, В. Урбановского [12].

Здесь рассматриваются некоторые динамические плоские задачи радиально-неоднородных несжимаемых тел со степенным упрочнением.

Уравнение деформационной теории пластичности в случае плоской деформации, степенного упрочнения, несжимаемости и радиальной неоднородности материала в обычных обозначениях можно представить в виде:

дифференциальные уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};\quad \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2};\tag{1}$$

закон упрочнения

$$\sigma_0=k(r)\varepsilon_0^m;$$

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)+4\tau_{r\theta}^2},\quad \varepsilon_0=\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+4\gamma_{r\theta}^2},\tag{2}$$

где $k(r)$—определенная функция, характеризующая неоднородность материала, m—показатель упрочнения материала;

соотношения между компонентами деформации, перемещений и напряжений

$$\varepsilon_0=\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{2}K(r)\sigma_0^{n-1}(\sigma_r-\sigma);\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{1}{2}K(r)\sigma_0^{n-1}(\sigma_\theta-\sigma);$$

$$2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=K(r)\sigma_0^{n-1}\tau_{r\theta};\tag{3}$$

здесь $n=1/m$, $K(r)=k^{-n}(r)$. Принимаем, что неоднородность определяется по степенному закону $k(r)=kr^{\mu}$, где k и μ—параметры, определяемые из эксперимента.

Компоненты перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости, можно представить в виде

$$u=r^{-\lambda-1}\psi'(\theta)f(t), \quad v=\lambda r^{-\lambda-1}\psi(\theta)f(t), \tag{4}$$

где $\psi(\theta)$ и $f(t)$—произвольные функции, λ—постоянный параметр. Для компонентов напряжений имеем:

$$\begin{gathered}
\sigma_r=\sigma_\theta-4k(\lambda+1)r^{-(\lambda+2)m+\mu}\chi(\theta)\psi'(\theta)f^m(t); \\
\tau_{r\theta}=kr^{-(\lambda+2)m+\mu}\chi(\theta)[\psi''(\theta)-\lambda(\lambda+2)\psi(\theta)]f^m(t); \\
\chi(\theta)=(\sqrt{4(\lambda+1)^2\psi'^2(\theta)+[\psi''(\theta)-\lambda(\lambda+2)\psi(\theta)]^2})^{m-1}.
\end{gathered} \tag{5}$$

1. *Сосредоточенная сила $P(t)$, приложенная в точке радиально-неоднородной бесконечной плоскости (задача Кельвина) (рис. 1).*

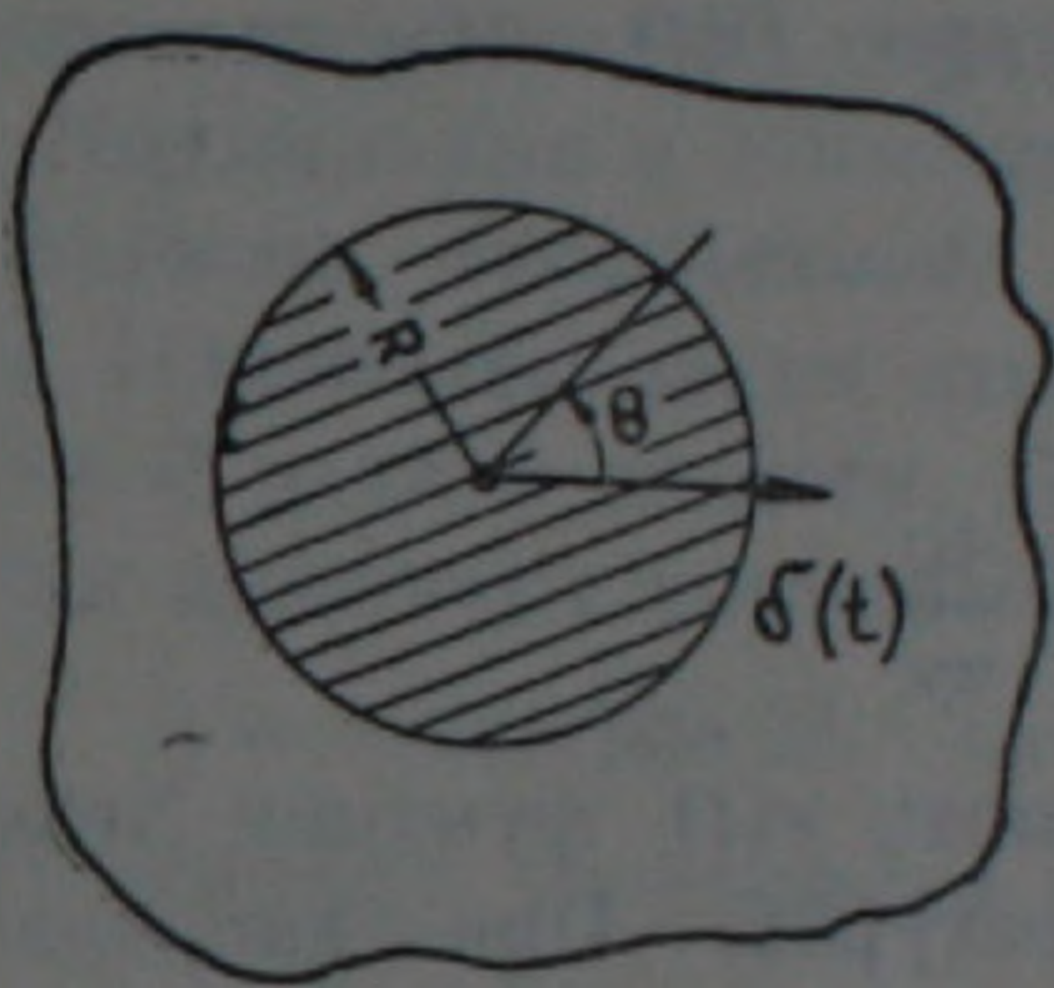

Рис. 1

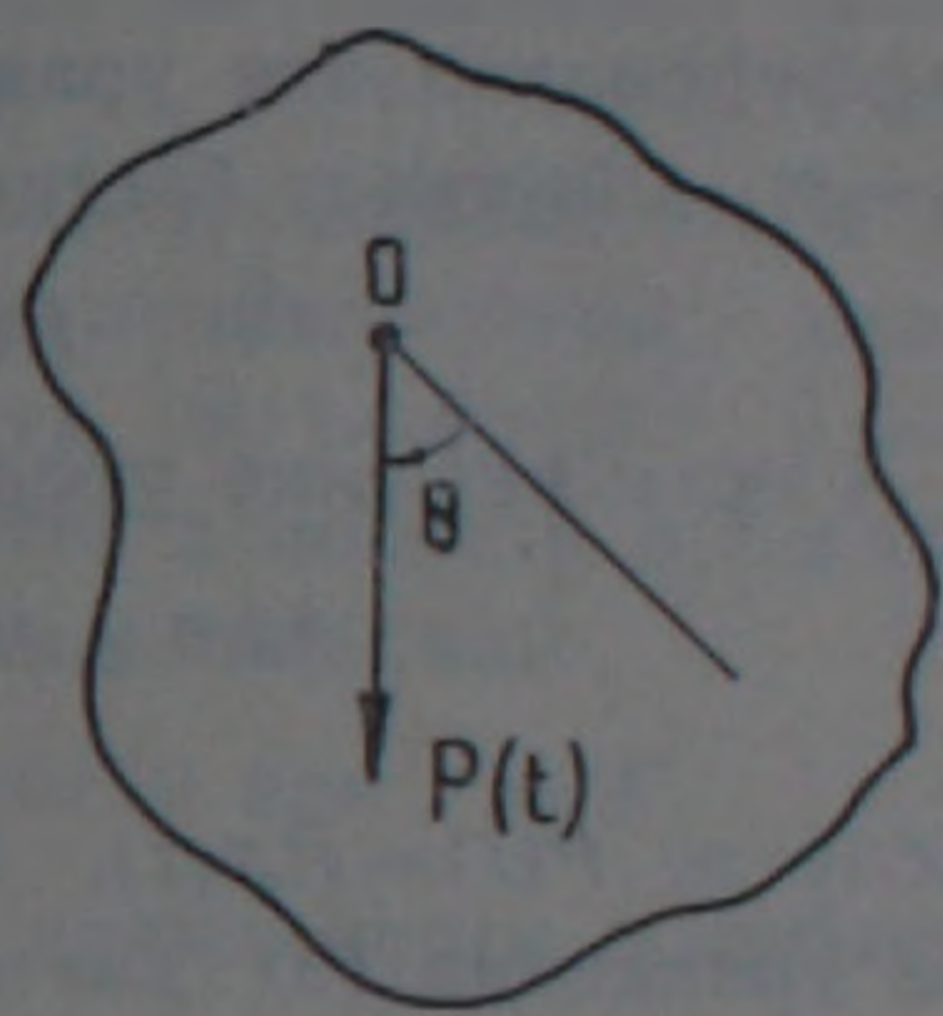

Рис. 2

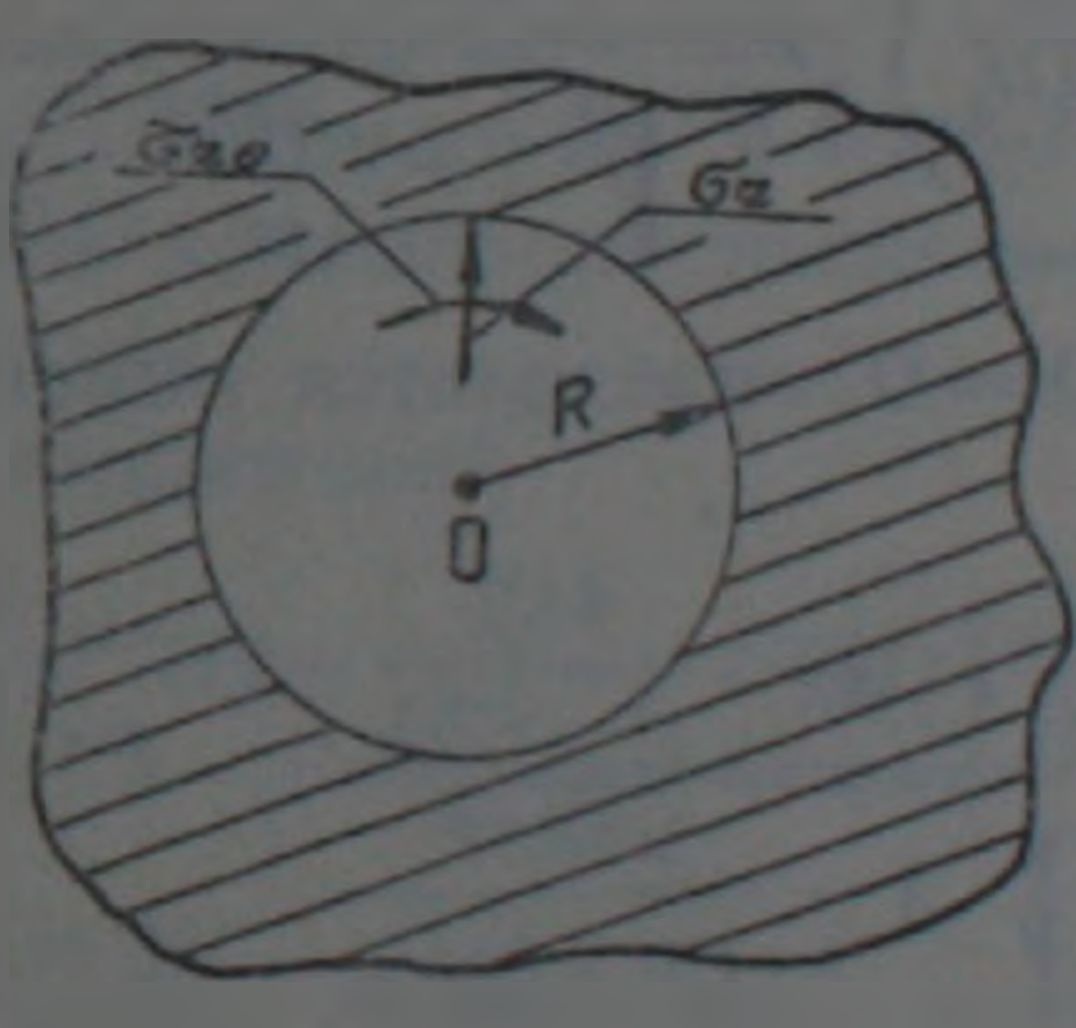

Рис. 3

Принимая в (4)—(5) $\psi(\theta)=\sin\theta$, $\mu=3m-1$, $\lambda=1$ и удовлетворяя дифференциальным уравнениям движения (1), приходим к выражениям компонентов напряжений:

$$\sigma_r,\ \sigma_\theta=-[\rho f''(t)+4^m(2\pm1)kf^m(t)]\frac{\cos\theta}{r}; \quad \tau_{r\theta}=-k4^m f^m(t)\frac{\sin\theta}{r} \tag{6}$$

и компонентов перемещений:

$$u=f(t)\frac{\cos\theta}{r^2}; \qquad v=f(t)\frac{\sin\theta}{r^2}. \tag{7}$$

Исходя из статического условия

$$2\int_0^{\pi}(\sigma_r\cos\theta-\tau_{r\theta}\sin\theta)rd\theta+P(t)=0 \qquad (8)$$

и из (6), вводя обозначение $4f(t)=F(t)$, приходим к дифференциальному уравнению нелинейного колебания

$$F''(t)+c^2F^m(t)=\frac{4P(t)}{\pi\rho}, \quad c^2=\frac{8k}{\rho}. \qquad (9)$$

Тогда формулы напряжения (6) и перемещения (7) примут вид:

$$\sigma_r,\ \sigma_\theta=-\left[\frac{P(t)}{\pi}\pm kF^m(t)\right]\frac{\cos\theta}{r}, \quad \tau_{r\theta}=-kF^m(t)\frac{\sin\theta}{r}; \qquad (10)$$

$$u=F(t)\frac{\cos\theta}{4r^2}, \quad v=F(t)\frac{\sin\theta}{4r^2}. \qquad (11)$$

Дифференциальное уравнение (9) при $F(t)=at^\nu$, где $a=\text{const}$, $\nu=2m/1-m$, допускает частное решение

$$F(t)=At^{\nu n}, \qquad (12)$$

причем A есть решение уравнения

$$c^2A^m+\nu n(\nu n-1)A=\frac{4a}{\pi\rho}. \qquad (13)$$

В случае $P(t)=P_0e(t)$, где $P_0=\text{const}$, $e(t)$ функция Хевисайда, решение уравнения (9) дается в квадратурах. При однородных начальных условиях ($F(0)=F'(0)=0$) будем иметь

$$t=\sqrt{\frac{\pi\rho}{8P_0}}\int_0^F\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{2\pi kx^m}{(m+1)P_0}}}. \qquad (14)$$

Из условия $F'(t_*)=0$ определится момент окончания этапа нагружения

$$t_*=\sqrt{\frac{\pi\rho}{8P_0}}\int_0^{F^*}\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{2\pi kx^m}{(m+1)P_0}}}, \quad F^*=\left[\frac{(m+1)P_0}{2\pi k}\right]^{\frac{1}{m}}. \qquad (15)$$

Здесь и в дальнейшем этапы разгрузки не рассматриваются.

2. *Движение жесткого кругового включения в радиально-неоднородной бесконечной плоскости (рис. 2).* Пусть жесткий круг с радиусом R получает прямолинейное перемещение в бесконечной плоскости с неоднородностью $k(r)=k(r/R)^\mu$, $\mu=3m-1$.

Граничные условия принимаем в виде

$$u=\delta\cos\theta, \quad v=\delta\sin\theta \text{ при } r=R; \qquad (16)$$

здесь $\delta=\delta(t)$ заданный закон движения круга.

Используя граничные условия (16), из (6) находим компоненты напряжения:

$$\sigma_r,\ \sigma_\theta = -\left[\rho R^2\left(\frac{\delta(t)}{R}\right)'' + (2\pm 1)k\left(\frac{4\delta(t)}{R}\right)^m\right]\frac{R}{r}\cos\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = -k\left(\frac{4\delta(t)}{R}\right)^m \frac{R}{r}\sin\theta. \tag{17}$$

Компоненты перемещения будут:

$$u = \delta(t)\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta,\quad v = \delta(t)\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin\theta. \tag{18}$$

По формуле (8) получаем силу давления жесткого круга на среду

$$P(t) = \pi R\left[\rho R^2\left(\frac{\delta(t)}{R}\right)'' + 2k\left(\frac{4\delta(t)}{R}\right)^m\right]. \tag{19}$$

Можно поставить и обратную задачу: по заданному закону изменения во времени $P(t)$ определить $\delta(t)$.

3. *Нормальные и касательные знакопеременные силы на границе полости бесконечной радиально-неоднородной плоскости (рис. 3).* Принимаем закон неоднородности $k(r)=k(r/R)^\mu$, $\mu=2(2m-1)$, где R радиус полости. Положим, что в полости в бесконечной плоскости действуют нормальные и касательные силы

$$\sigma_r = -kq(t)\sin 2\theta,\quad \tau_{r\theta} = -kq(t)\cos 2\theta \text{ при } r=R, \tag{20}$$

где $q(t)$ меняется во времени по закону нелинейного колебания

$$F''(t) + c^2F^m(t) = 0,\qquad c^2 = \frac{36k}{\rho R^{2(2m-1)}}, \tag{21}$$

причем $F(t) = R^4q^n(t)$.

Полагая в (4)—(5) $\psi(\theta)=\cos 2\theta$, $\mu=2(2m-1)$, $\lambda=2$ и удовлетворяя дифференциальным уравнениям движения (1), вводя обозначения $12f(t)=F(t)$, получим:

для компонентов напряжений

$$\sigma_r = \left[\rho F''(t) + \frac{24k}{R^{2(2m-1)}}F^m(t)\right]\frac{\sin 2\theta}{12r^3};$$

$$\sigma_\theta = \rho F''(t)\frac{\sin 2\theta}{12r^3},\quad \tau_{r\theta} = -\frac{k}{R^{2(2m-1)}}F^m(t)\frac{\cos 2\theta}{6r^2}; \tag{22}$$

для перемещений

$$u = -F(t)\frac{\sin 2\theta}{6r^3},\quad v = F(t)\frac{\cos 2\theta}{6r^3}. \tag{23}$$

Решение уравнения (21) при начальных условиях $F(0)=0$ $F'(0)=J$ будет

$$t = \int_0^F \frac{dx}{\sqrt{J^2 - \frac{2c^2}{m+1}x^{m+1}}}. \tag{24}$$

Используя граничные условия (20), для напряжений получаем

$$\sigma_r = -kq(t)\frac{R^2}{r^2}\sin 2\theta, \qquad \sigma_\theta = -3kq(t)\frac{R^2}{r^2}\sin 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -kq(t)\frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta. \tag{25}$$

Для перемещения будем иметь:

$$\frac{u}{R} = -\frac{1}{6}q^n(t)\frac{R^3}{r^3}\sin 2\theta; \qquad \frac{v}{R} = \frac{1}{6}q^n(t)\frac{R^3}{r^3}\cos 2\theta. \tag{26}$$

Из условия $F'(t_*)=0$ находим момент окончания этапа нагружения

$$t_* = \int\limits_0^{F^*}\frac{dx}{\sqrt{J^2 - \frac{2c^2}{m+1}x^{m+1}}}, \qquad F^* = \left[\frac{(m+1)J^2}{2c^2}\right]^{\frac{1}{m+1}}. \tag{27}$$

Плоская динамическая задача радиально-неоднородной трубы под действием равномерного внутреннего давления и начального импульса рассмотрена в работе [11].

Институт механики Академии
наук Армянской ССР

Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Պլաստիկորեն անհամասեռ, աստիճանային ամրապնդումով մարմինների շարք դինամիկ խնդիրներ

Ուսումնասիրված են մի քանի հարթ դինամիկ խնդիրներ, շառավիղային ուղղությամբ անհամասեռ, անսեղմելի և աստիճանային ամրապնդումով նյութի դեպքում։ Ստացված են արտահայտություններ լարումների և տեղափոխությունների համար։

Դիտարկվող առաջին խնդրում, ելնելով ստատիկայի պայմանից, տեղափոխության $f(t)$ ֆունկցիայի համար ստացված է ոչ գծային տատանման հավասարումը։ Կառուցված է այդ հավասարման լուծումը կենտրոնացած ուժի որոշակի դեպքերի համար։ Երկրորդ խնդրում, օգտվելով եզրային պայմաններից, անմիջապես որոշված է $f(t)$ ֆունկցիան, իսկ երրորդ խնդրում $f(t)$ ֆունկցիայի որոշումը նույնպես բերված է ոչ գծային տատանման հավասարմանը, որի լուծումը տրված է կվադրատուրայով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. А. Рахматулин*, ПММ, т. 10, № 3 (1946). [2] *Х. А. Рахматулин*, ПММ, т. 14, № 1 (1950). [3] *В. С. Ленский*, Вестник МГУ, № 3, 1949. [4] *С. Д. Мочахов*, Уч. запис. Томск. ун-та, № 25 (1955). [5] *П. Пежина*, Arch. Mech. Stos, 11, № 5 (1959). [6] *П. Пежина*, Основные вопросы вязкопластичности, Мир, М., 1968. [7] *R. Gutowski, S. Kaliski, I. Osiecki*, Biuletyn WAT, № 2 (1959). [8] *В. Н. Кукуджанов, Л. В. Никитин*, Изв. АН СССР, отд. мех. и мат., № 4, 1960. [9] *М. А. Задоян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1960. [10] *Х. А. Рахматулин, Г. С. Шапиро*, Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955. [11] *N. Cristescu*, in: Proc. Sec. Symposium, Pergamon Press, New York, 1960. [12] *В. Ольшак, Я. Рыхлевский, В. Урбановский*. Теория пластичности неоднородных тел, Мир, М., 1964.