ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 2

УДК 512

МАТЕМАТИКА

Г. С. Микаелян

Сопряженность максимальных X-подгрупп относительно некоторого автоморфизма

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/I 1982)

1. В теории групп исключительно важна роль известной теоремы норвежского математика Силова о сопряженности максимальных p-подгрупп конечных групп, что и послужило поводом для многочисленных ее обобщений. Большинство из этих обобщений построено по следующей схеме: берется некоторый класс групп $\mathbf{X}$ и ставится целью описание различных подклассов класса $\mathbf{Y}$ тех групп, в которых максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы сопряжены.

Б. И. Плоткиным поставлена задача обратного характера: исходя из данного класса групп $\mathbf{Y}$ описать те классы групп $\mathbf{X}$, для которых максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы сопряжены в любой $\mathbf{Y}$-группе (легко сообразить, что достаточно тут ограничиваться случаем $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y}$).

В ([1]) и ([2]) автор решает эту задачу для классов конечных и конечных разрешимых групп при условии замкнутости класса $\mathbf{X}$ относительно взятия подгрупп. Было показано, что в первом случае $\mathbf{X}$—либо единичный класс, либо класс всех конечных групп, либо класс всех p-групп для некоторого простого p, во втором же случае—класс конечных разрешимых П-групп для некоторого множества простых чисел П. Тем самым были обращены (в указанном выше смысле) как теорема Силова, так и теорема Холла о сопряженности холловских П-подгрупп конечных разрешимых групп (см. ([3])).

В настоящей заметке для тех же классов конечных и конечных разрешимых групп исследуется задача Б. И. Плоткина в ситуации, когда вместо внутренних автоморфизмов рассматриваемых групп берутся произвольные их автоморфизмы. Теоремы А и Б показывают, что добавление новых автоморфизмов к внутренним здесь не меняет суть дела и в этой ситуации не появляются новые по сравнению с отмеченными выше „силовски правильные" классы в классах конечных и конечных разрешимых групп.

2. Теорема А. *Если абстрактный класс конечных групп* $\mathbf{X}$ *замкнут относительно взятия подгрупп и в каждой конечной группе максимальные* $\mathbf{X}$*-подгруппы сопряжены относительно некоторого автоморфизма этой группы, то* $\mathbf{X}$*—либо единичный класс, либо класс всех конечных групп, либо же класс конечных* p*-групп для некоторого простого числа* p.

Отметим, что замкнутость класса $\mathbf{X}$ относительно взятия подгрупп здесь существенна.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ абстрактный неединичный класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и в каждой конечной группе максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы сопряжены относительно некоторого автоморфизма этой группы.

Сначала покажем, что для всяких натуральных чисел m и n верна следующая импликация:

$$\mathbf{Z}_n \in \mathbf{X} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{Z}_n \times \ldots \times \mathbf{Z}_n}_{m}. \tag{1}$$

Проведем индукцию m. Положим

$$G = gp(b) \times gp(a_1) \times \ldots \times gp(a_{m-1}),$$

где $gp(b) \cong \mathbf{Z}_{n^2}$, $gp(a_i) \cong \mathbf{Z}_n$, $i=1, \ldots, m-1$. Пусть подгруппа

$$B = gp(b^k) \times gp(a_1) \times \ldots \times gp(a_{m-1}), \tag{2}$$

где $k \in \mathbf{Z}$, группы G является ее максимальной $\mathbf{X}$-подгруппой. Тогда для некоторого $\varphi \in Aut(G)$ имеем $\varphi(b^n) \in B$.

Предположим, что

$$\varphi(b) = b^\beta a_1^{\alpha_1} \ldots a_{m-1}^{\alpha_{m-1}}, \text{ где } \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbf{Z}.$$

Тогда $\varphi(b^n) = b^{n\beta}$ и, ввиду (2), $b^{n\beta} \in gp(b^k)$. Но $|b^{n\beta}| = |b^n| = n$. Следовательно $|b^k| : n$, и импликация (1) доказана.

Предположим далее, что p любое простое число и A—конечная абелева группа, порядка не равного двум. Тогда верна следующая импликация:

$$\mathbf{Z}_p,\ A \in \mathbf{X} \Rightarrow A_2 \mathbf{Z}_p \in \mathbf{X}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $G A_2 \mathbf{Z}_p$, где $\mathbf{Z}_p$, $A \in \mathbf{X}$ и $A \neq 1$ (случай $A=1$ тривиален). Если $A^{\mathbf{Z}_p}$ максимальная $\mathbf{X}$-подгруппа в G($A^{\mathbf{Z}_p} \in \mathbf{X}$ следует из импликации (1)), то для некоторой $\mathbf{X}$-подгруппы B группы G $\mathbf{Z}_p \subseteq B$ и $\varphi(A^{\mathbf{Z}_p}) = B$, где $\varphi \in Aut(G)$. Но тогда

$$B \subseteq C_G(\mathbf{Z}_p), \tag{4}$$

и так как $C_G(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Z}_p \cdot Diag(A^{\mathbf{Z}_p})$, $|B| = |A|^p$, то мы получаем неравенство $p \cdot |A| < |A|^p$, что противоречит включению (2). Следовательно $A^{\mathbf{Z}_p}$ не является максимальной $\mathbf{X}$-подгруппой в G. Но тогда $G \in \mathbf{X}$, и импликация (3) доказана.

Наконец, покажем, что для любой конечной p-группы P

$$\mathbf{Z}_p,\ P \in \mathbf{X} \Rightarrow P_2 \mathbf{Z}_p \in \mathbf{X}. \tag{5}$$

Действительно, пусть $\mathbf{Z}_p$, $P \in \mathbf{X}$, $\mathbf{Z}_p = gp(a)$ и b элемент наибольшего порядка в P. Тогда очевидно $|a\dot{b}| > |\dot{b}|$, где $\dot{b} \in P^{\mathbf{Z}_p}$ и

$$\dot{b}(x) = \begin{cases} b, & \text{при } x = 1, \\ 1, & \text{при } x \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно, для любого автоморфизма φ группы $G = P_2 \mathbf{Z}_p$

$$\varphi(a\dot{b}) \notin P^{\mathbf{Z}_p}. \tag{6}$$

Разберем далее два случая: а) $|b| \neq 2$, б) $|b| = 2$. В случае а), применяя импликацию (3), получаем

$$\varphi(ab) \in \mathbf{X}, \qquad (7)$$

а в случае б) рассмотрим в группе $S(4)$ $\mathbf{X}$-подгруппы $A=gp\,((12),(34))$ и $B=gp\,((12)(34),(13)(24))$, которые не переводятся друг на друга при помощи любого афтоморфизма группы $S(4)$. Тогда для некоторого $\varphi \in Aut(S(4))$ $gp(\varphi(12), B) \in \mathbf{X}$. Но, очевидно, любая транспозиция в $S(4)$ с B порождает подгруппу, содержащую элемент порядка 4, и так как в данном случае $|ab|=4$, то (7) доказано и в случае б). Но тогда для некоторого $\varphi \in Aut(G)$

$$gp(\varphi(ab), P^{Z_p}) \in \mathbf{X}. \qquad (8)$$

Для завершения доказательства импликации (5) остается заметить, что ввиду (6) левая часть (8) совпадает с G.

Теперь предположим, что класс $\mathbf{X}$ содержит неединичную p-подгруппу для некоторого простого числа p. Индукцией по порядку $|P|$ покажем, что тогда в $\mathbf{X}$ содержится и любая конечная p-группа P. Очевидно $\mathbf{Z}_p \in \mathbf{X}$. Поэтому пусть $|P|>p$ и все p-группы, имеющие порядок, меньший $|P|$, содержатся в $\mathbf{X}$. Тогда, рассматривая в P максимальную собственную подгруппу B, вложим P по теореме Калужнина—Краснера в сплетение $B_{\mathfrak{Z}}\mathbf{Z}_p$. Тогда имея в виду (5), получим $P \in \mathbf{X}$.

Таким образом, в $\mathbf{X}$ содержится любая p-группа. Если $\mathbf{X}$ не содержит нетривиальных q-групп, $q \neq p$, то он совпадает с классом конечных p-групп. Поэтому пусть некоторая неединичная q-группа также содержится в $\mathbf{X}$. Тогда рассмотрим группу $S(n)$, где $n \neq 6$, $n \vdots pq$. Ввиду того, что $S(n)$ совершенная и

$$S(n) \in \langle C_F, S \rangle \{\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_q\},$$

по теореме A работы [2] мы получаем $S(n) \in \mathbf{X}$, т. е. $\mathbf{X}$ совпадает с классом всех конечных групп.

3. Теорема Б. *Если класс конечных разрешимых групп* $\mathbf{X}$ *замкнут относительно взятия подгрупп и в каждой конечной разрешимой группе максимальные* $\mathbf{X}$*-подгруппы сопряжены относительно какого-либо автоморфизма этой группы, то* $\mathbf{X}$ *совпадает с классом конечных разрешимых* Π*-групп для некоторого множества простых* Π.

И в этой теореме замкнутость класса $\mathbf{X}$ относительно взятия подгрупп существенна.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и обладающий тем свойством, что в каждой конечной разрешимой группе максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы сопряжены при помощи некоторого автоморфизма этой группы.

Заметим, что утверждение (5) останется верным, если в нем класс $\mathbf{X}$ будет удовлетворять приведенным здесь условиям. Следовательно, если некоторая нетривиальная p-группа (p—простое число) содержится в $\mathbf{X}$, то в $\mathbf{X}$ содержится и любая p-группа. Далее ввиду сопряженности относительно автоморфизмов максимальных подгрупп в любой конечной разрешимой группе ее максимальные $\mathbf{X}$-подгруппы будут холловскими $\omega(X)$-подгруппами, где через $\omega(X)$ обозначено множество тех и только тех простых чисел, которые входят в каноническое разложение порядков некоторых X-групп. Таким образом X совпадает с классом конечных разрешимых $\omega(X)$-групп.

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Հ. Ս. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Մաքսիմալ X-ենթախմբերի համալուծությունը ինչ-որ ավտոմորֆիզմի նկատմամբ

Խմբերի տեսության մեջ շատ մեծ է նորվեգացի մաթեմատիկոս Սիլովի՝ կամայական վերջավոր խմբի մաքսիմալ X-ենթախմբերի համալուծության վերաբերյալ թեորեմի դերը, որի շնորհիվ վերջինս ունեցել է բազում ընդհանրացումներ։ Այդ ընդհանրացումներն հիմնականում ունեն այսպիսի կառուցվածք. վերցվում է խմբերի ինչ-որ X դաս և խնդիր է դրվում նկարագրելու այն խմբերի Y դասը, որոնց մեջ մաքսիմալ X-ենթախմբերն համալուծ են։ Բ. Ի. Պլոտկինի կողմից առաջադրվել է այդ խնդրի հակադարձ խնդիրը. ելնելով խմբերի տրված Y դասից նկարագրել բոլոր այն X դասերը, որոնց համար կամայական Y-խմբում մաքսիմալ X-ենթախմբերն համալուծ են։

([1]) և ([2]) աշխատանքներում այս խնդիրը լուծված է խմբերի վերջավոր և վերջավոր լուծելի դասերի համար։ Սույն աշխատանքում այդ նույն դասերի համար նշված խնդիրն ընդհանրացվում է այն առումով, որ սովորական համալուծության փոխարեն դիտարկվում են համալուծություններ կամայական ավտոմորֆիզմների նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. С. Микаелян.* XVI Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы, ч. 2, 1981. [2] *Г. С. Микаелян,* УМН, т. 36, вып. 6 (1981). [3] *А. Г. Курош,* Теория групп, Наука, М., 1967.