ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. К. Оганесян

Об одной задаче кручения полубесконечного цилиндра посредством упругой круглой шайбы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/IX 1981)

Рассматривается контактная задача о передаче крутящей нагрузки от упругой круглой шайбы малой толщины к полубесконечному упругому цилиндру большего радиуса, защемленного по своей боковой поверхности. При этом шайба прикреплена к торцу цилиндра концентрически.

Аналогичная задача, когда шайба абсолютно жесткая, исследована в ([1]). Укажем также на работы ([2,3]), примыкающие к данной статье.

Шайба, подверженная действию крутящей нагрузки произвольной интенсивности, трактуется в рамках обобщенного плоского напряженного состояния, а полубесконечный цилиндр—в рамках обычной теории кручения упругих тел ([4]). В этой постановке решение задачи сводится к решению интегрального уравнения смешанного типа, когда часть интегрального оператора имеет фредгольмовский тип, а часть—вольтерровский. На основе аппарата ортогональных полиномов Якоби это уравнение сведено к эквивалентной квазирегулярной бесконечной системе уравнений. Для основных механических характеристик задачи—тангенциальных контактных напряжений в круговой зоне контакта и угла жесткого поворота шайбы получены явные выражения. В предельном случае, когда радиус цилиндра становится бесконечным, обсуждаемая задача представляет собой известную задачу Рейснера—Сагоцци ([5]) для упругой круговой шайбы.

Следует отметить, что на основе изложенных здесь результатов можно непосредственно получить решение задачи о кручении двух одинаковых полубесконечных цилиндров, соединенных между собой упругой круговой шайбой и защемленных по своим боковым поверхностям.

1. Пусть упругий полубесконечный цилиндр радиуса a с модулем сдвига μ_2 по своей боковой поверхности жестко защемлен, а его торец $z=h/2$ концентрически подкреплен упругой круговой шайбой радиуса b $(b<a)$ и малой толщины h из другого материала с модулем сдвига μ_1. Пусть далее поверхность шайбы $z=-h/2$ загружена тангенциальными напряжениями $\tau_{z\theta}$ произвольной интенсивности $\tau_{0s}(r)$, т. е. $\tau_{z\theta}|_{z=-h/2}=\tau_{0s}(r)$, $(0<r<b)$. Требуется определить

тангенциальные контактные напряжения $\tau_s(r)$ $(0<r<b)$, а также приведенный угол жесткого кручения шайбы.

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи. Пользуясь известными результатами ([1]), после элементарных операций можем записать

$$u_\theta^{(2)}(r,0) = -\frac{2}{\mu_2 a^2}\int_0^b K(r,\rho)\rho\tau_s(\rho)d\rho, \quad (0<r<a), \tag{1.1}$$

где

$$K(r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_n r)\,J_1(\lambda_n\rho)}{\lambda_n J_0^2(a\lambda_n)}, \quad (0<r,\ \rho<a). \tag{1.2}$$

Здесь $u_\theta^{(2)}(r,0)$ — перемещение точек торца $z=0$ цилиндра в окружном направлении, $J_1(r)$ — функция Бесселя первого рода, а λ_n — корни транцендентного уравнения $J_1(\lambda_n a)=0$.

Обращаясь теперь к рассмотрению напряженного состояния шайбы, сначала запишем следующие граничные условия:

$$\tau_{z\theta}(r,h/2)=\tau_s(r);\ \tau_{z\theta}(r,-h/2)=\tau_{0s}(r);\quad \tau_{r\theta}(b,z)=T_{0s}; \tag{1.3}$$
$$(0\leqslant r<b,\quad |z|<h/2),$$

отражающие условия ее загружения.

Уравнение равновесия шайбы в разбираемом случае имеет вид

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0. \tag{1.4}$$

Далее исходя из предположения малости толщины h, вместо истинных напряжений $\tau_{r\theta}(r,z)$ и перемещений $u_\theta^{(1)}(r,z)$, как обычно, будем рассматривать их средние величины:

$$\overline{\tau}_{r\theta}(r)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{r\theta}(r,z)dz,\quad \overline{u}_\theta^{(1)}(r)=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}u_\theta^{(1)}(r,z)dz.$$

С учетом последнего и закона Гука при помощи (1.3) и (1.4) придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\overline{u}_\theta^{(1)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\overline{u}_\theta^{(1)}}{dr}-\frac{\overline{u}_\theta^{(1)}}{r^2}=-\frac{\tau_{0s}(r)+\tau_s(r)}{h\mu_1}, \quad (0\leqslant r<b).$$

Так как $u_\theta^{(1)}(0)<\infty$, то решение этого уравнения будет даваться формулой

$$\overline{u}_\theta^{(1)}(r)=\gamma r-\frac{1}{2h\mu_1 r}\int_0^r(r^2-\rho^2)\tau_s(\rho)d\rho+g(r), \quad (0\leqslant r\leqslant b), \tag{1.5}$$

где

$$g(r)=-\frac{1}{2h\mu_1 r}\int_0^r(r^2-\rho^2)\tau_{0s}(\rho)d\rho,$$

а γ — неизвестный приведенный угол жесткого кручения шайбы.

Теперь, принимая во внимание условие контакта

$$u_\theta^{(1)}(r) = u_\theta^{(2)}(r, 0), \quad (0 \leqslant r < b),$$

из (1.1) и (1.5) после несложных выкладок и перехода к безразмерным координатам и величинам для определения неизвестных тангенциальных контактных напряжений $\tau(x)$ получаем следующее разрешающее уравнение:

$$\int_0^1 L(x, y)\tau(y) y dy = \gamma_0 x + \frac{\mu_0}{x}\int_0^x (x^2 - y^2)\tau(y)dy + g_0(x), \tag{1.6}$$

которое должно рассматриваться при условии

$$\int_0^1 \tau(y) y^2 dy = 1, \tag{1.7}$$

эквивалентном условию моментного равновесия шайбы.

Здесь введены следующие обозначения:

$$x = r/b, \quad y = \rho/b, \quad T^{(0)} = T^0/b^3,$$

$$T_0 = T_{0s}b^2 - \int_0^b \tau_{0s}(r) r^2 dr, \quad \tau(x) = \tau_s(bx)/T^{(0)},$$

$$g_0(x) = \frac{\mu_0}{T^{(0)}x}\int_0^x (x^2 - y^2)\tau_{0s}(by)dy, \quad L(x, y) = \frac{1}{a}K(bx, by)$$

$$\gamma_0 = \frac{a\mu_2}{2bT^{(0)}}\gamma, \qquad \mu_0 = \frac{a\mu_2}{4h\mu_1}.$$

2. С целью сведения интегрального уравнения (1.6) при условии (1.7) к бесконечной системе уравнений ядро $L(x, y)$ согласно известным результатам ([6]) представим в виде

$$L(x, y) = \frac{1}{2\delta}\int_0^\infty J_1(xt)J_1(yt)dt - \frac{1}{\pi\delta}\int_0^\infty \frac{K_1(t/\delta)}{I_1(t/\delta)} I_1(xt)I_1(yt)dt, \left(\delta = \frac{b}{a}\right) \tag{2.1}$$

и воспользуемся спектральным соотношением ([7])

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 L_0(x, y)\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} P^1_{2n-1}(\sqrt{1-y^2})\, dy = \lambda_n P^1_{2n-1}(\sqrt{1-x^2}), \tag{2.2}$$

где

$$L_0(x, y) = \int_0^\infty J_1(x, \xi)\, J_1(y\xi)d\xi, \quad \lambda_n = \frac{[(2n-1)!!]^2 n}{(2n-1)[2n!!]^2}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$P^1_{2n-1}(x)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода, $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса 1, а $K_1(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Далее, исходя из (2.2) решение уравнения (1.6) представим формулой

$$\tau(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\sum_{n=1}^{\infty}x_nP^{1}_{2n-1}(\sqrt{1-y^2}) \tag{2.3}$$

и применим известную процедуру ([8–10]). В результате для определения неизвестных коэффициентов $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$x_m+\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}x_n=\delta\lambda_m(g_m-\gamma_0a_m),\quad (m=1,\ 2,\ \dots), \tag{2.4}$$

где введены обозначения

$$K_{m,n}=\frac{\lambda_m}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}K^{(1)}_{m,n}-\delta\gamma_0K^{(2)}_{m,n}\right],\quad (m,\ n=1,\ 2,\ \dots), \tag{2.5}$$

$$K^{(1)}_{m,n}=\int\limits_0^1\frac{xP^{1}_{2m-1}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}dx\int\limits_0^1\frac{F(x,\ y)yP^{1}_{2n-1}(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}dy;$$

$$K^{(2)}_{m,n}=\int\limits_0^1\frac{P^{1}_{2m-1}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}dx\int\limits_0^x(x^2-y^2)\frac{P^{1}_{2n-1}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}}dy;$$

$$F(x,\ y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{K_1(t/\delta)}{I_1(t/\delta)}I_1(xt)I_1(yt)dt,\quad a_m=\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}P^{1}_{2m-1}(\sqrt{1-x^2})dx;$$

$$g_m=\int\limits_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P^{1}_{2m-1}(\sqrt{1-x^2})\,g_0(x)dx,\quad \lambda_m=\frac{(4m-1)[2m!!]^2}{[2m!!]^2m^2}.$$

Легко видеть, что $\lambda_m\cong4\pi$ при $m\to\infty$. С другой стороны, сделав замену переменных

$$x=\sqrt{1-\xi^2},\quad y=\sqrt{1-\eta^2},\quad (0\leqslant\xi,\ \eta\leqslant1)$$

и воспользовавшись формулой (([11]), с. 149, формула 6),

$$P^{1}_{n}(x)=-\sqrt{1-x^2}\frac{dP_n}{dx},\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра, после несложных выкладок получим

$$K^{(1)}_{m,n}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1M(\xi,\ \eta)P_{2m-1}(\xi)P_{2n-1}(\xi)d\xi d\eta; \tag{2.6}$$

$$(m,\ n=1,\ 2,\ \dots).$$

$$K^{(2)}_{m,n}=C_m-2\int\limits_0^1\xi P_{2m-1}(\xi)P_{2n-1}(\xi)d\xi;\qquad a_m=-c_m.$$

Здесь приняты такие обозначения:

$$M(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 G(\xi, \eta)}{\partial\xi\partial\eta}; \qquad c_m = \begin{cases} 2/3, & m=1 \\ 0, & m=2, 3, \ldots \end{cases} \tag{2.7}$$

$$G(\xi, \eta) = \sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}\; F(\sqrt{1-\xi^2}, \sqrt{1-\eta^2}).$$

Далее, (2.3) подставим в условие (1.7). После простых операций будем иметь

$$x_1 = -3\pi/2. \tag{2.8}$$

Теперь решение бесконечной системы (2.4) при правой части, равной $\lambda_m g_m$, обозначим через $x_m^{(g)}$, а ее решение при правой части, равной $\lambda_m a_m - x_m^{(a)}$.

Тогда

$$x_m = \delta[x_m^{(g)} - \gamma_0 x_m^{(a)}], \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Отсюда при $m=1$ и из (2.8) находим относительный угол поворота шайбы: $\gamma_0 = (3\pi/2 + \delta x_1^{(g)})/\delta x_1^{(a)}$

Займемся исследованием бесконечной системы (2.4) на регулярность. С этой целью при помощи подстановки $x_m = y_m m^{-\varepsilon}$, $(m=1, 2\ldots)$, где ε — сколь угодно малое, но фиксированное положительное число, представим ее в виде

$$y_m + m^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{m,n}}{n^\varepsilon} y_n = \delta m^\varepsilon \lambda_m (g_m - \gamma_0 a_m), \quad (m=1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

и положим

$$S_m = m^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|K_{m,n}|}{n^\varepsilon}. \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Чтобы выяснить поведение последней суммы при $m \to \infty$, воспользуемся известным асимптотическим представлением многочленов Лежандра (([11]), с. 163, формула (2)). После некоторых преобразований можем записать

$$K_{m,n}^{(1)} \simeq \frac{1}{\pi n \sqrt{m}\sqrt{n}} \left[\int_0^\pi \int_0^\pi M\left(\cos\frac{\vartheta}{2}, \cos\frac{\varphi}{2}\right) \cos m\vartheta \cos n\varphi \, W_1(\vartheta, \varphi)\, d\vartheta\, d\varphi + \Phi_{m,n}^{(1)} \right]$$

$$K_{m,n}^{(2)} \simeq -\frac{1}{\pi\sqrt{m}\sqrt{n}} \left[\int_0^\pi \cos n\vartheta \cos m\vartheta \cos\frac{\vartheta}{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{4}\right) d\vartheta + \Phi_{m,n}^{(2)} \right]. \tag{2.10}$$

Здесь $\Phi_{m,n}^{(1)}$ и $\Phi_{m,n}^{(2)}$ суммы аналогичных интегралов.

Теперь заметим, что согласно (2.5) и (2.7) функция $M(\xi, \eta)$ квадратично суммируема в квадрате $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, и, принимая во внимание асимптотические формулы (2.10) и (2.11), при помощи известной методики ([7,8]) находим, что по крайней мере

$$S_m = 0(m^{-1/2+\varepsilon}), \quad (m \to \infty),$$

откуда вытекает квазиполная регулярность бесконечной системы (2.9).

В заключение отметим, что когда $b=\mathrm{const}$, $a\to\infty$, следовательно $\delta\to 0$, представление (2.1) даст

$$\delta L(x, y)\to\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty J_1(xt)\,J_1(yt)\,dt.$$

Если вдобавок к этому $\mu_1=\infty$ и, следовательно, $\mu_0=0$, то уравнение (1.6) превращается в интегральное уравнение известной задачи Рейснера—Сагоцци ([5]). Тогда бесконечная система (2.4) исчезает и получается простое соотношение, откуда коэффициенты x_m определяются непосредственно и точно.

В заключение автор благодарит С. М. Мхитаряна за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Դ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Առաձգական շրջանաձև տափօղակով կիսաանվերջ գլանի ոլորման մի խնդրի մասին

Դիտարկված է բարակապատ շրջանաձև առաձգական տափօղակից ոլորող բեռի փոխանցման կոնտակտային խնդիր, մեծ շառավիղ ունեցող կիսաանվերջ գլանին, որի կողմնային մակերևույթը ամրակցված է։ Տափօղակը կոնցենտրիկ ամրակցված է հիմքին։ Խնդիրը բերվում է խառը տիպի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որի օպերատորի մի մասը Ֆրեդհոլմի, իսկ մյուսը Վոլտերրայի տիպի է։ Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների տեսության հիման վրա, այդ հավասարումը բերվում է համարժեք կվազիռեգուլյար անվերջ հավասարումների սիստեմի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *I. N. Sneddon*, Приложение теории функций в механике сплошной среды. Труды Международного симпозиума в Тбилиси. т. 1, Наука, М., 1965. [2] *Н. М. Бородачев. Ф. Н. Бородачева*, Изв. АН АрмССР, сер. Механика, т. 19, № 5 (1966). [3] *А. А. Баблоян, В. С. Тоноян*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14. № 6 (1961). [4] *Н. Х. Арутюнян, В. Л. Абрамян*, Кручение упругих тел, Физматгиз. М., 1963. [5] *И. Н. Снеддон*, Преобразование Фурье, ИЛ, М., 1955. [6] *J. G. Cooke, C. J. Tranter*, Quart. J. Mech and Appl. Math. Pt 3, vol. XII (1959). [7] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). [8] *N. K. Arutunian, S. M. Mkhitarian*, Some contact Problems for a semiplane with elastic stifferens. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary volume. Volters—Nordorf Publ. 1971, 3—20. [9] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 36, вып. 5 (1972). [10] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 35, вып. 1 (1971). [11] *Г. Бейтман, А. Эрдейн*, Высшие трансцендентные функции, т. 1, Наука, М., 1973.