ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXV 1982 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Г. Мхитарян, С. М. Мхитарян

# Об одном способе построения решения интегро-дифференциального уравнения Прандтля на полубесконечном интервале и его приложение к контактным задачам теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. М. Абрамяном 4/IX 1981)

Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля встречается в многочисленных задачах о контактном взаимодействии стрингеров с массивными деформируемыми телами [1-4]. Таким и родственными уравнениями описываются многие задачи теории дифракции [5] и другие смешанные задачи математической физики [6].

Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля на полубесконечном интервале в работе [2] сведено к разностному функциональному уравнению, допускающему замкнутое решение в квадратурах. Это же уравнение с точки зрения применения метода Винера—Хопфа рассматривалось в [7].

В настоящей статье рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Прандтля общего вида, интерпретируемое как определяющее уравнение контактной задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера переменной жесткости к упругой плоскости или полуплоскости. Решение этого уравнения с использованием интегрального соотношения, содержащего ортогональные многочлены Чебышева—Лагерра и ядро Коши, сводится к бесконечной системе линейных уравнений. Этот способ, представляющий также самостоятельный интерес, для построения решения исходного уравнения в ряде случаев оказывается более эффективным.

1. Указанная выше контактная задача, когда модуль упругости полубесконечного стрингера по ее длине изменяется по закону $E_s = E_1E(x)$ ($E(0)=1$; $0\leqslant x<\infty$), где $E(x)$—положительная функция из достаточно общего класса, после перехода к безразмерным величинам, как в [2], сводится к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi'(\eta)d\eta}{\eta-\xi}=\lambda(\xi)\,\varphi(\xi)+\lambda(\xi)\,T_0(\xi)\quad(0<\xi<\infty)\tag{1.1}$$

при граничном условии

$$\varphi(0)=1-T_0.\tag{1.2}$$

Здесь

$$\varphi(\xi)=\int\limits_{\xi}^{\infty}\tau(\eta)d\eta; \quad T_0(\xi)=\int\limits_{\xi}^{\infty}\tau_0(\eta)d\eta; \quad T_0=T_0(0), \tag{1.3}$$

где $\tau(\xi)$ — неизвестные контактные напряжения, действующие на полубесконечном участке соединения стрингера с основанием, $\tau_0(\xi)$ — известная функция, описывающая распределение наперед заданных сил на верхней грани стрингера, $T_0$ — их равнодействующая, а функция $\lambda(\xi)$ известным образом (линейно) связана с $E^{-1}(x)$. Отметим, что функцией $\varphi(\xi)$ дается распределение осевых напряжений в стрингере.

Заметим, что уравнение (1.1) при однородном стрингере, когда $\lambda(\xi)\equiv1$, и при $\tau_0(\xi)\equiv0$ совпадает с известным уравнением из ([2]).

Методика решения определяющего интегро-дифференциального уравнения (1.1) при граничном условии (1.2) заключается в его сведении к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Она основывается на ортогональном интегральном соотношении

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\eta}{2}}L_n^{-\frac{1}{2}}(\eta)d\eta}{(\eta-\xi)\sqrt{\eta}}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\,n!}\,\frac{G_{2n}(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \quad (0<\xi<\infty;\ n=0,1,2,\ldots), \tag{1.4}$$

вытекающем из результатов работы ([8]).

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, $\{L_n^{-\frac{1}{2}}(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ — известные полиномы Чебышева—Лагерра, а функции $\{G_{2n}(\sqrt{\xi})\}_{n=0}^{\infty}$ согласно ([8]) составляют полную ортогональную систему функций в $L_\rho^2(0,\infty)$, где $\rho(\xi)=1/\sqrt{\xi}$. Они выражаются конечным рядом по вырожденной гипергеометрической функции ([8]).

Исходя из (1.4) решение уравнения (1.1) представим в виде бесконечного ряда

$$\tau(\xi)=-\varphi'(\xi)=\frac{e^{-\frac{\xi}{2}}}{\sqrt{\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}x_nL_n^{-\frac{1}{2}}(\xi)+\frac{A\sqrt{\alpha}e^{-\frac{\alpha\xi}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\xi}} \quad (0<\xi<\infty), \tag{1.5}$$

с неизвестными коэффициентами $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $A$, где $\alpha$ — любое положительное фиксированное число; вообще говоря $0<\alpha<1$. В этой формуле слагаемое, зависящее от $\alpha$, при малых $\alpha$ фактически описывает распределение тангенциальных контактных напряжений в случае абсолютно жесткой полубесконечной накладки. Далее следуя известной процедуре ([9,10]), придем к эквивалентной бесконечной системе

$$2\sqrt{\pi}(-1)^m\frac{(2m)!}{m!}x_m+\sum_{n=0}^{\infty}R_{m,n}x_n=a_m-Ab_m \quad (m=0,1,2,\ldots) \tag{1.6}$$

где

$$R_{m,n}=\int\limits_{0}^{\infty}\lambda(\xi)G_{2m}(\sqrt{\xi})Q_n(\xi)d\xi \quad (m,n=0,1,2,\ldots); \tag{1.7}$$

$$a_m = -\int_0^\infty \lambda(\xi)\, T_0(\xi)\, G_{2m}(\sqrt{\xi})\, d\xi \qquad (m=0, 1, 2, \ldots);$$

$$b_m = \int_0^\infty \left\{ \lambda(\xi) \left[ 1 - \Phi\left( \sqrt{\frac{\alpha\xi}{2}} \right) \right] + \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\, \frac{G_0(\sqrt{\alpha\xi})}{\sqrt{\xi}} \right\} G_{2m}(\sqrt{\xi})\, d\xi.$$

Здесь $\Phi(\xi)$ — интеграл вероятности ([11]), а

$$Q_n(\xi) = \int_\xi^\infty e^{-\frac{\eta}{2}} L_n^{-\frac{1}{2}}(\eta)\, d\eta \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Используя формулу Родрига для полиномов Чебышева—Лагерра, интегрированием по частям $Q_n(\xi)$ можно выразить через интеграл вероятности.

Приняв во внимание (1.3) и (1.6), обнаружим, что граничное условие (1.2) приводит к соотношению

$$A + \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x_n = 1 - T_0. \tag{1.8}$$

Итак, решение исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1) при граничном условии (1.2) эквивалентно решению бесконечной системы (1.6) и уравнению (1.8).

Преобразуем эту бесконечную систему. Сначала выделим из нее уравнение при $m=0$:

$$(2\sqrt{\pi} + R_{0,0})x_0 + \sum_{n=1}^\infty R_{0,n}\, x_n = a_0 - Ab_0, \tag{1.9}$$

а затем представим ее в форме

$$2\sqrt{\pi}(-1)^m \frac{(2m)!}{m!} x_m + \sum_{n=1}^\infty R_{m,n} x_n = a_m - Ab_m - R_{m,0}x_0, \quad (m=1, 2\ldots). \tag{1.10}$$

Решение бесконечной системы (1.10) при правой части, равной $a_m$, обозначим через $x_m^{(a)}$, при $b_m$ — $x_m^{(b)}$, а при $R_{m,0}$ — $x_m^{(0)}$. Тогда будем иметь

$$x_m = x_m^{(a)} - Ax_m^{(b)} - x_0 x_m^{(0)} \quad (m=1, 2, \ldots).$$

После того как будут найдены $x_m^{(a)}$, $x_m^{(b)}$ и $x_m^{(0)}$, неизвестные коэффициенты $A$ и $x_0$ определятся при помощи уравнений (1.8) и (1.9).

В дальнейшем будем иметь дело с системой (1.10) с правой частью $c_m$, которая поочередно берется равной $a_m$, или $b_m$, или же $R_{m,0}$.

2. Докажем квазиполную регулярность бесконечной системы (1.10). С этой целью сначала преобразуем выражение ядра $R_{m,n}$.

Переставляя порядок интегрирования, а затем интегрируя по частям, из первой формулы (1.7) получим

$$
R_{m,n}=\frac{1}{2n+1}\int_0^{\infty}\sqrt{\eta}\,e^{-\frac{\eta}{2}}L_n^{\frac{1}{2}}(\eta)\,d\eta\int_0^{\eta}\lambda(\xi)G_{2m}(\sqrt{\xi})\,d\xi-
$$

$$
-\frac{1}{n+1/2}\int_0^{\infty}\sqrt{\eta}\,e^{-\frac{\eta}{2}}L_n^{\frac{1}{2}}(\eta)\,\lambda(\eta)G_{2m}(\sqrt{\eta})\,d\eta \quad (m,\,n=1,\,2,\,\ldots) \tag{2.1}
$$

Далее, положив

$$
x_n\sqrt{A_n}=y_n \quad (n=1,\,2,\,\ldots), \quad A_n=\frac{\Gamma(n+3/2)}{n!},
$$

где $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера, бесконечную систему (1.10) преобразуем к виду

$$
y_m+\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}\,y_n=d_m \quad (m=1,\,2,\,\ldots), \tag{2.2}
$$

где введены обозначения

$$
K_{m,n}=\frac{(-1)^m\sqrt{2m+1}}{\sqrt[4]{\pi}\,2^{m+3/2}\sqrt{(2m)!}}\,\frac{R_{m,n}}{\sqrt{A_n}} \qquad (m,\,n=1,\,2,\,\ldots)
$$

$$
d_m=\frac{(-1)^m\sqrt{2m+1}}{\sqrt[4]{\pi}\,2^{m+3/2}\sqrt{(2m)!}}\,c_m,
$$

а $R_{m,n}$ выражается формулой (2.1).

Известным способом оценим суммы

$$
S_m=\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}| \quad (m=1,\,2,\,\ldots).
$$

В результате при помощи (2.1) получим

$$
S_m\leqslant\frac{\sqrt{2m+1}}{\sqrt[4]{\pi}\,2^{m+3/2}\sqrt{(2m)!}}\left\{\lambda_1\sqrt{\int_0^{1}\sqrt{\xi}\left|\int_0^{\xi}\lambda(\eta)G_{2m}(\sqrt{\eta})\,d\eta\right|^2d\xi}+\right.
$$

$$
\left.+\lambda_2\sqrt{\int_0^{\infty}\lambda^2(\xi)\,G_{2m}^2(\sqrt{\xi})\,d\xi}\right\}. \tag{2.3}
$$

где

$$
\lambda_1=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{8}-1}, \qquad \lambda_2=2\lambda_1.
$$

Далее на основе ([8]) получим

$$
G'_{2m}(0)=O\left(\frac{\sqrt{m}\,\Gamma(2m)}{\Gamma(m+1/2)}\right) \quad (m\to\infty).
$$

Вновь возвращаясь к формуле (2.3), это неравенство теперь запишем в виде

$$
S_m\leqslant S'_m,
$$

где

$$S'_m \cong \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} |G'_{2m}(0)| \sqrt{2m+1}}{2^{m+3/2} \sqrt{(2m)!(4m+1)}} \left\{ \lambda_1 \sqrt{\int\limits_0^{\infty} \sqrt{\xi} \left[ \int\limits_0^{\xi} \lambda(\eta) \sin\left(\sqrt{4m+1}\sqrt{\eta}\right) d\eta \right]^2 d\xi} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \sqrt{\int\limits_0^{\infty} \lambda^2(\xi) \sin^2\left(\sqrt{4m+1}\sqrt{\xi}\right) \sqrt{\xi}\, d\xi} \right\} \quad (m \to \infty).$$

Оказывается. что при соблюдении условия

$$\lambda(\xi) = 0(\xi^{-7/4-\varepsilon}) \quad (\xi \to \infty),$$

где $\varepsilon$—любое сколь угодно малое, но фиксированное положительное число, последние два интеграла существуют и конечны. Тогда после некоторых элементарных операций находим, что по крайней мере

$$S_m = 0(m^{-1/4}) \quad (m \to \infty).$$

Последнее и доказывает квазиполную регулярность бесконечной системы (2.2), благодаря чему решение этой системы можно найти методом последовательных приближений или методом редукции.

Ереванский институт
народного хозяйства
Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Գ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

## Կիսաանվերջ ինտերվալի վրա Պրանդտլի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման լուծման կառուցման մի եղանակի մասին և առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիրներում նրա կիրառությունը

*Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ ինտերվալի վրա ընդհանուր տեսքի Պրանդտլի ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումը, որը մեկնաբանվում է որպես փոփոխական կոշտության կիսաանվերջ ստրինգերից առաձգական հարթությանը կամ կիսահարթությանը ուժի փոխանցման վերաբերյալ կոնտակտային խնդրի որոշիչ հավասարում։ Չեբիշև—Լագերի օրթոգոնալ բազմանդամներ և Կոշու կորիզ պարունակող ինտեգրալ առնչության օգնությամբ այդ հավասարումը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Melan*, Ingr.-Arch., 3, H. 2(1932). [2] *W. T. Koiter*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 8, № 2 (1955). [3] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). [4] *Б. Л. Абрамян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 5 (1972). [5] *Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестфаль*. Теория дифракции, Мир, М., 1964. [6] *Б. Нобл*, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962. [7] *В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 34, вып. 2 (1970). [8] *В. Г. Мхитарян*, ДАН АрмССР, т. 55, № 3 (1972). [9] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 36, вып. 5 (1970). [10] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 36, вып. 5 (1972). [11] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971.