

УДК 517. 986. 64

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Айрапетян, член-корреспондент АН СССР И. М. Гельфанд, М. И. Граев,
Г. Р. Оганесян

Формула Планшереля для интегрального преобразования, связанного с комплексом прямых, пересекающих алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{CP}^3$

(Представлено 29/XII 1981)

В работе получена формула Планшереля для интегрального преобразования, относящего функциям в пространствах $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{CP}^3$ их интегралы по комплексным прямым, пересекающим фиксированную кривую Λ .

Отметим, что для рассмотренного в ⁽¹⁾ частного случая, когда Λ — плоская алгебраическая кривая второго порядка, из формулы Планшереля следует разложение регулярного представления группы Лоренца $SL(2, \mathbb{C})$ на неприводимые представления (формула Планшереля для $SL(2, \mathbb{C})$). Первоначально формула Планшереля для $SL(2, \mathbb{C})$ была получена в ⁽²⁾, ее связь с задачей интегральной геометрии была указана в ⁽³⁾, подробный вывод формулы Планшереля методами интегральной геометрии был проведен в ⁽⁴⁾. Формула обращения для интегрального преобразования, связанного с прямыми в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$, пересекающими кривую, получена в ⁽⁴⁾.

1. Преобразование в аффинном пространстве. Пусть в комплексном аффинном пространстве $\mathbb{C}^3$ задана кривая Λ , пересекающая почти все плоскости ровно в N точках (например, Λ — алгебраическая кривая). Зададим интегральное преобразование I , относящее функциям на $\mathbb{C}^3$ их интегралы по комплексным прямым, пересекающим Λ :

$$g(x, \lambda) = \frac{i}{2} \int f(xt + \lambda) dt \wedge d\bar{t}, \quad x \in \mathbb{C}^3 \setminus O, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (1)$$

Преобразование (1) заведомо определено для функций $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$ (пространство бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих функций), и очевидно, что функция $g = If$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad g(\rho x, \lambda) = \rho^{-1} \bar{\rho}^{-1} g(x, \lambda), \quad \forall \rho \in \mathbb{C}^1 \setminus O;$$

2) функция $g(x, \lambda)$ бесконечно дифференцируема по x и быстро убывает вместе со всеми производными по x , когда прямая $x = xt + \lambda$ стремится в бесконечность. Это значит, что для любых компакта $K \subset \mathbb{C}^3 \setminus O$, мультииндексов $\nu_1 = (\nu_1^1, \nu_1^2, \nu_1^3)$, $\nu_2 = (\nu_2^1, \nu_2^2, \nu_2^3)$ и натурального числа n справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{|\nu_1|+|\nu_2|}}{\partial z^{\nu_1} \partial \bar{z}^{\nu_2}} g(z, \lambda) \right| = O(\rho^{-n}(z, \lambda)), \quad z \in K;$$

$\rho(z, \lambda)$ — расстояние от фиксированной точки $x_0 \in \mathbb{C}^3$ до прямой $x = at + \lambda$ в какой-либо фиксированной евклидовой метрике на $\mathbb{C}^3$.

Отнесем произвольной функции $g(z, \lambda)$ и фиксированным точкам $\lambda \in \Lambda$, $z \in \mathbb{C}^3 \setminus O$ следующую дифференциальную форму на $\mathbb{C}^3 \setminus O$:

$$g(z, \lambda) \delta^{(1,1)}(\langle z, \tilde{z} \rangle) \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)},$$

где

$$\langle z, \tilde{z} \rangle = \sum x_i \tilde{z}_i, \quad \omega(z) = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

$\delta^{(1,1)}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \delta$, где $\delta(z)$ — дельта функция. Если g удовлетворяет ус-

ловию однородности 1), то эта форма опускается с $\mathbb{C}^3 \setminus O$ на $\mathbb{CP}^2$ при стандартном отображении $\mathbb{C}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^2$ и, значит, интеграл этой формы по любому сечению Γ расслоения $\mathbb{C}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^2$ не зависит от Γ .

Предложение 1. Функции $g = If$, $f \in S(\mathbb{C}^3)$, удовлетворяют следующему условию симметрии:

$$\int_{\Gamma} g(z, \lambda^1) \delta^{(1,1)}(\langle z, \tilde{z} \rangle) \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)} = \int_{\Gamma} g(z, \lambda^2) \delta^{(1,1)}(\langle z, \tilde{z} \rangle) \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)} \quad (2)$$

для любых $z \in \mathbb{C}^3 \setminus O$ и $\lambda^1, \lambda^2 \in \Lambda$ таких, что $\langle \lambda^1, \tilde{z} \rangle = \langle \lambda^2, \tilde{z} \rangle$.

Обозначим через V_{Λ} пространство всех функций $g(z, \lambda)$ на $(\mathbb{C}^3 \setminus O) \times \Lambda$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), и через $V_{\Lambda}^0 \subset V_{\Lambda}$ — подпространство функций, удовлетворяющих дополнительно условию симметрии (2). В силу доказанного $I(S(\mathbb{C}^3)) \subset V_{\Lambda}^0$.

Зададим в $S(\mathbb{C}^3)$ и V_{Λ} скалярные произведения по формулам:

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{i}{2} \right)^3 \int_{\mathbb{C}^3} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx \wedge d\bar{x}, \quad f_1, f_2 \in S(\mathbb{C}^3),$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = - \left(\frac{i}{2} \right)^3 \frac{16\pi^2}{N} \int_{\Lambda} \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial g(z, \lambda)}{\partial z_i} \frac{\overline{\partial g(z, \lambda)}}{\partial \bar{z}_j} \omega(z) \wedge \quad (3)$$

$$\wedge \overline{\omega(z)} \wedge d\lambda_i \wedge d\bar{\lambda}_j, \quad g_1, g_2 \in V_{\Lambda},$$

где Γ — любое сечение расслоения $\mathbb{C}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^2$ (от выбора сечения интеграл не зависит).

Обозначим через $\bar{V}_{\Lambda}$, $\bar{V}_{\Lambda}^0$ пополнения V_{Λ} и V_{Λ}^0 по норме $\|g\| = \langle g, g \rangle^{1/2}$. Заметим, что пополнение $S(\mathbb{C}^3)$ по норме $(f, f)^{1/2}$ есть пространство $L^2(\mathbb{C}^3)$.

Теорема 1. 1) Для любых функций $f_1, f_2 \in S(\mathbb{C}^3)$ имеем:

$$(f_1, f_2) = \langle If_1, If_2 \rangle;$$

таким образом, отображение I продолжается с $S(\mathbb{C}^3)$ до изометрического отображения гильбертовых пространств $I: L^2(\mathbb{C}^3) \rightarrow V_{\Lambda}$.

$$2) I(L^2(\mathbb{C}^3)) = \bar{V}_{\Lambda}^0.$$

2. Преобразование в проективном пространстве

Пусть в комплексном проективном пространстве задана кривая Λ , пересекающая почти каждую плоскость ровно в N точках (например, Λ — алгебраическая кривая). Обозначим через $S(\mathbb{CP}^3)$ пространство $\mathbb{C}^*$ -функций f на $\mathbb{C}^4 \setminus O$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(\rho x) = \rho^{-2} \bar{\rho}^{-2} f(x), \quad \forall \rho \in \mathbb{C}^* \setminus O;$$

введем интегральное преобразование I функций $f \in S(\mathbb{CP}^3)$, связанное с кривой Λ .

Пусть $\mathbb{C}^4 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^3$ — стандартное расслоение и $L \in \mathbb{C}^4 \setminus O$ — прообраз кривой Λ . Прообраз любой комплексной прямой, пересекающей Λ , есть двумерное подпространство в $\mathbb{C}^4$, задаваемое уравнением $x = ut + \lambda s$, где $u \in \mathbb{C}^4 \setminus O$, $\lambda \in L$ — линейно-независимые векторы.

Лемма 1. Пусть $f \in S(\mathbb{CP}^3)$ и $u \in \mathbb{C}^4 \setminus O$, $\lambda \in L$ — фиксированные линейно-независимые векторы. Тогда дифференциальная форма на $\mathbb{C}^2 \setminus O$

$$\omega_f(u, \lambda) = \frac{i}{2} f(ut + \lambda s)(t ds - s dt) \wedge \overline{(t ds - s dt)}$$

опускается с $\mathbb{C}^2 \setminus O$ на $\mathbb{CP}^1$ при стандартном отображении $\mathbb{C}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

Определение преобразования I :

$$If(u, \lambda) = \int_{\mathbb{CP}^1} \omega_f(u, \lambda). \quad (4)$$

Лемма 2. Функции $g = If$ удовлетворяют соотношениям:

- 1) $g(u + \rho \lambda, \lambda) = g(u, \lambda), \quad \forall \rho \in \mathbb{C}^*$,
- 2) $g(\rho u, \sigma \lambda) = \rho^{-1} \bar{\rho}^{-1} \sigma^{-1} \bar{\sigma}^{-1} g(u, \lambda), \quad \forall \rho, \sigma \in \mathbb{C}^* \setminus O$.

Замечание. Условие 1) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial g(u, \lambda)}{\partial u_k} d\lambda_k = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g(u, \lambda)}{\partial \bar{u}_k} d\bar{\lambda}_k = 0.$$

Обозначим через W_Λ пространство $\mathbb{C}^*$ -функций на многообразии пар (u, λ) линейно-независимых векторов $u \in \mathbb{C}^4$, $\lambda \in L$, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Пусть задана произвольная функция $g \in W_\Lambda$ и пусть $\lambda \in L$, $\tilde{\lambda} \in (\mathbb{C}^4)' \setminus O$ — любые векторы, удовлетворяющие условию $\langle \lambda, \tilde{\lambda} \rangle = 0$. Введем дифференциальную (2,2) — форму на $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda|$, где $|\lambda|$ — подпространство, натянутое на вектор λ :

$$\omega_g(\lambda, \tilde{\lambda}) = g(u, \lambda) \delta^{(1,1)}(\langle u, \tilde{\lambda} \rangle) \sigma(\lambda, u) \wedge \overline{\sigma(\lambda, u)},$$

где

$$\sigma(\lambda, u) = \sum \text{sign}(i_1, i_2, i_3, i_4) \lambda_{i_1} u_{i_2} du_{i_3} \wedge du_{i_4}.$$

Лемма 3. Дифференциальная форма $\omega_g(\lambda, \tilde{\lambda})$ опускается с $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda|$ на $\mathbb{CP}^2$, где $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda| \rightarrow \mathbb{CP}^2$ — композиция стандартных отображений $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda| \rightarrow \mathbb{C}^4 \setminus |\lambda| \setminus O = \mathbb{C}^3 \setminus O$ и $\mathbb{C}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^2$. Таким образом, определен интеграл этой формы по $\mathbb{CP}^2$.

Предложение 2. Если $g = If$, $f \in S(\mathbb{CP}^3)$, то выполняется следующее условие симметрии:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} g(u, \lambda^1) \delta^{(1,1)}(\langle u, \tilde{z} \rangle) \sigma(\lambda^1, u) \wedge \overline{\sigma(\lambda^1, u)} = \int_{\mathbb{CP}^2} g(u, \lambda^2) \delta^{(1,1)}(\langle u, \tilde{z} \rangle) \sigma(\lambda^2, u) \wedge \overline{\sigma(\lambda^2, u)} \quad (5)$$

для любых $\tilde{z} \in (\mathbb{C}^4)' \setminus O$ и $\lambda^1, \lambda^2 \in L$ таких, что $\langle \lambda^1, \tilde{z} \rangle = \langle \lambda^2, \tilde{z} \rangle = O$.

Обозначим через $W_\Lambda^0 \subset W_\Lambda$ подпространство функций $g \in W_\Lambda$, удовлетворяющих условию симметрии (5).

Введем скалярные произведения в пространствах $S(\mathbb{CP}^2)$ и W_Λ . Очевидно, что для любых $f_1, f_2 \in S(\mathbb{CP}^3)$ дифференциальная форма на $\mathbb{C}^4 \setminus O$ $f_1(x) \overline{f_2(x)} \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}$, где

$$\omega(x) = \sum \text{sign}(i_1, i_2, i_3, i_4) x_{i_1} dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge dx_{i_4},$$

опускается с $\mathbb{C}^4 \setminus O$ на $\mathbb{CP}^3$ при стандартном отображении $\mathbb{C}^4 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^3$.

Мы полагаем:

$$(f_1, f_2) = \left(\frac{l}{2}\right)^3 \int_{\mathbb{CP}^3} f_1(x) \overline{f_2(x)} \omega(x) \wedge \overline{\omega(x)}.$$

Лемма 4. Для любых $g_1, g_2 \in W_\Lambda$, $k, l = \overline{1, 4}$ и любого фиксированного $\lambda \in L$ дифференциальные формы на $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda|$

$$\omega_{g_1, g_2}^{k, l}(u, \lambda) = \frac{\partial g_1(u, \lambda)}{\partial u_k} \frac{\overline{\partial g_2(u, \lambda)}}{\partial u_l} \sigma(\lambda, u) \wedge \overline{\sigma(\lambda, u)}$$

опускаются с $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda|$ на $\mathbb{CP}^2$ при композиции стандартных отображений $\mathbb{C}^4 \setminus |\lambda| \rightarrow \mathbb{C}^4 / \{\lambda\} \setminus O = \mathbb{C}^3 \setminus O$ и $\mathbb{C}^3 \setminus O \rightarrow \mathbb{CP}^2$.

Таким образом, определены интегралы

$$\Phi_{g_1, g_2}^{k, l}(\lambda) = \int_{\mathbb{CP}^2} \omega_{g_1, g_2}^{k, l}(u, \lambda), \quad \lambda \in L.$$

В свою очередь, дифференциальная форма на L

$$\omega_{g_1, g_2} = \sum \Phi_{g_1, g_2}^{k, l}(\lambda) d\lambda_k \wedge d\bar{\lambda}_l$$

опускается с L на Λ при стандартном отображении $L \rightarrow \Lambda$; тем самым определен интеграл $\int_\Lambda \omega_{g_1, g_2}$.

Мы полагаем для любых $g_1, g_2 \in W_\Lambda$: $\langle g_1, g_2 \rangle = - \left(\frac{l}{2}\right)^3 \times$
 $\times \frac{4\pi^2}{N} \int_\Lambda \omega_{g_1, g_2}$, т. е.

$$\langle g_1, g_2 \rangle = - \left(\frac{l}{2}\right)^3 \frac{4\pi^2}{N} \int_\Lambda \int_{\mathbb{CP}^2} \sum_{k, l=1}^4 \frac{\partial g_1(u, \lambda)}{\partial u_k} \frac{\overline{\partial g_2(u, \lambda)}}{\partial u_l} \sigma(\lambda, u) \wedge \overline{\sigma(\lambda, u)} \wedge d\lambda_k \wedge d\bar{\lambda}_l.$$

Обозначим через $\overline{S(\mathbb{CP}^3)}$ и $\overline{W_\Lambda}, \overline{W_\Lambda^0}$ пополнения пространств $S(\mathbb{CP}^3)$ и W_Λ, W_Λ^0 относительно норм $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ и $\|g\| = \langle g, g \rangle^{1/2}$ соответственно.

Теорема 2. 1) Для любых функций $f_1, f_2 \in S(\mathbb{CP}^3)$ имеем:

$$(f_1, f_2) = \langle If_1, If_2 \rangle;$$

таким образом, отображение I продолжается до изометрического отображения гильбертовых пространств $I: \overline{S(\mathbb{CP}^1)} \rightarrow \overline{W_\Lambda}$.

$$2) I(\overline{S(\mathbb{CP}^1)}) = \overline{W_\Lambda}.$$

Примечание. Можно перейти от функций $f \in S(\mathbb{CP}^1)$ к их ограничениям на комплексную сферу $S^3 \subset \mathbb{C}^4: \sum x_i^2 = 1$. При этом интегральное преобразование (4) перейдет в преобразование, относящее четным функциям на S^3 их интегралы по большим кругам (сечения S^3 двумерными подпространствами), пересекающим фиксированную алгебраическую кривую $\Lambda \subset S^3$. Аналогичное интегральное преобразование можно определить и для функций на поверхности $P(x) = 1$, где $P(x)$ — произвольный однородный многочлен. Из теоремы 2 следует теорема Планшереля для этих преобразований.

3. Утверждения теорем 1 и 2 эквивалентны. Это вытекает из следующих легко проверяемых утверждений. Реализуем $\mathbb{C}^3$ как гиперплоскость $x_4 = 1$ в $\mathbb{C}^4$ и сопоставим кривой $\Lambda \subset \mathbb{CP}^1$ кривую $\Lambda_1 = L \cap \mathbb{C}^3$, где L — прообраз Λ в $\mathbb{C}^4 \setminus O$. Тогда

1) отображение $i_1: f \rightarrow f_1$, где $f_1(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 1)$, является изоморфизмом гильбертовых пространств $\overline{S(\mathbb{CP}^1)}$ и $L^2(\mathbb{C}^3)$;

2) отображение $i_2: g \rightarrow g_1$, где $g_1(x_1, x_2, x_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = g(x_1, x_2, x_3, 0; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 1)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus O$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda_1$, является изоморфизмом гильбертовых пространств $\overline{W_\Lambda}$ и $\overline{V_{\Lambda_1}}$;

3) $i_2 \circ I_{\text{пр}} = I_{\text{эф}} \circ i_1$, где $I_{\text{эф}}$, $I_{\text{пр}}$ — интегральные преобразования, определенные соответственно формулами (1) и (4).

4) при отображении i_2 проективное условие симметрии (5) перейдет в аффинное условие (2).

4. Доказательство теоремы 1 опирается на некоторые свойства преобразования Фурье однородных функций, которые приводятся ниже без доказательства.

Следуя (1), определим обобщенную однородную функцию F на $\mathbb{C}^3$ бистепени (μ, ν) (μ и ν — произвольные комплексные числа, разность которых целое число) следующим соотношением:

$$\left(F, \varphi \left(\frac{z}{a} \right) \right) = a^{\mu+3} \bar{a}^{\nu+3} (F, \varphi(z))$$

для произвольного комплексного числа a , отличного от нуля, и для любой функции φ из пространства основных функций на $\mathbb{C}^3$.

Преобразование Фурье функции $\varphi \in S(\mathbb{C}^3)$ определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(z) = \left(\frac{i}{2} \right)^3 \int_{\mathbb{C}^3} \varphi(z) \exp[i \operatorname{Re} \langle z, \bar{z} \rangle] dz \wedge d\bar{z},$$

а обобщенной функции $F \in (S(\mathbb{CP}^1))'$ — равенством

$$(\tilde{F}, \tilde{\varphi}) = (2\pi)^6 (F, \varphi(-z)), \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{C}^3).$$

Пусть (μ, ν) — произвольная пара комплексных чисел, разность

которых — целое число. Обозначим через $\Phi_{\mu, \nu}$ пространство всех однородных C^∞ -функций на $C^3 \setminus O$ бистепени однородности (μ, ν) . Для любой функции $F \in \Phi_{\mu, \nu}$, рассматриваемой как однородная обобщенная функция, определено преобразование Фурье.

Лемма 5. Если $\mu = -1, -2$ и $\nu = -1, -2$, то преобразование Фурье $f \rightarrow \bar{f}$ является изоморфизмом пространств $\Phi_{\mu, \nu}$ и $\Phi_{-\mu-3, -\nu-3}$; при этом

$$\bar{F}(\zeta) = -4\pi^2 (-2i)^{2+\mu+\nu} \int F(z) \zeta^{(2+\mu, 2+\nu)} (\langle z, \zeta \rangle) \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)}.$$

Пусть $F_1 \in \Phi_{\mu, \nu}$, $F_2 \in \Phi_{-\mu-3, -\nu-3}$ и пусть Γ — произвольное сечение расслоения $C^3 \setminus O \rightarrow CP^2$ (т. е. произвольная поверхность в C^3 , пересекающая по одному разу почти каждую прямую, проходящую через точку O). Тогда интеграл

$$\int_{\Gamma} F_1(z) \overline{F_2(z)} \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)}$$

не зависит от выбора сечения Γ .

Теорема 3. Для любых функций $F_1, F_2 \in \Phi_{\mu, \nu}$, где $\mu = -1, -2$, $\nu = -1, -2$, имеет место следующая формула:

$$\int_{\Gamma_1} F_1(z) \overline{F_2(z)} \omega(z) \wedge \overline{\omega(z)} = (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma_2} F_1(\zeta) \overline{F_2(\zeta)} \omega(\zeta) \wedge \overline{\omega(\zeta)};$$

Γ_1, Γ_2 — произвольные сечения расслоений $C^4 \setminus O \rightarrow CP^3$ и $(C^4)' \setminus O \rightarrow CP^3$.

Следуя работам (1) и (4), положим

$$G(\zeta, s) = \frac{i}{2} \int \bar{f}(\tau) |\tau|^2 \exp[i \operatorname{Re} \tau s] d\tau \wedge d\bar{\tau},$$

где $\bar{f}$ — преобразование Фурье функции $f \in S(C^3)$, и обозначим через $\bar{g}(\zeta, \lambda)$ преобразование Фурье по x функции $g(x, \lambda) = If$. Тогда имеет место соотношение (см. (4))

$$\bar{g}(\zeta, \lambda) = G(\zeta, \langle \lambda, \zeta \rangle). \quad (6)$$

Теорема 1 легко следует из соотношения (6) и из теоремы 3.

5. Добавление. Для интегрального преобразования (4) имеет место следующая формула обращения (см. (3)):

$$f(x) = -\frac{i}{8\pi^2 N} \int \frac{\partial^2 g(x, \lambda)}{\partial x_i \partial \bar{x}_j} d\lambda_i \wedge d\bar{\lambda}_j, \quad (7)$$

где Γ — сечение расслоения $L \rightarrow \Lambda$ (от выбора Γ интеграл не зависит). Из (7), как следствие, получается формула обращения для интегрального преобразования (1) в аффинном пространстве (1.2.5), а также для преобразования, указанного в примечании п. 2.

Институт прикладной математики Академии наук СССР
Институт математики Академии наук Армянской ССР

C^3 -ում և CP^3 -ում հանրահաշվական կորը հատող ուղիղների կոմպլեքսի
հետ կապված ինտեգրալ ձևափոխության համար Պլանշերեի բանաձևը

Հոդվածում ստացված է Պլանշերեի բանաձևը այնպիսի ինտեգրալ ձևա-
փոխության համար, որը C^3 և CP^3 տարածություններում տրված ֆունկցիա-
ներին համապատասխանեցնում է Λ հանրահաշվական կորը հատող կոմպլեքս
ուղիղներով նրանց ինտեգրալները: Նշենք, որ ⁽¹⁾ աշխատանքում քննարկ-
ված մասնավոր դեպքում, երբ Λ երկրորդ կարգի հարթ հանրահաշվական
կոր է, Պլանշերեի բանաձևից հետևում է Լորենցի խմբի ռեզուլյալ ներկա-
յացման վերլուծությունը շրերվող ներկայացումների:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин*, Интегральная геометрия и
связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз М., 1962. ² *И. М. Гель-*
фанд, М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. мат. т. II, 411—504 (1947). ³ *И. М.*
Гельфанд, УМН, т. 15, № 2 (1960). ⁴ *А. А. Кириллов*, ДАН СССР, т. 137, № 2 (1961). ⁵ *И. М.*
Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, Итоги науки и техники. Современные проблемы
математики, т. 16, 53—228 (1980). ⁶ *И. М. Гельфанд, М. И. Граев*, Функциональ-
ный анализ и его приложения, т. 2, № 3 (1968).