ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости почти всюду двойных рядов Фурье—Хаара суммируемых функций

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР А. А. Талаляном 7/XI 1981)

В работах ([1-3]) установлено:

1) существует функция $f(x, y)\in L[0, 1]^2$ такая, что прямоугольные частичные суммы ее двойного ряда Фурье—Хаара расходятся почти всюду;

2) для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f(x, y)\in L$ и измеримое множество $E\subset[0, 1]^2$, $|E|>1-\varepsilon$ такие, что сферические частичные суммы двойного ряда Фурье—Хаара функции $f(x, y)$ расходятся на множестве E;

3) сферические частичные суммы двойного ряда Фурье—Хаара любой функции $f(x, y)\in L\lg(L)$ сходятся почти всюду.

В связи с этим в настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости почти всюду двойных рядов Фурье—Хаара суммируемых функций в зависимости от изменения их значений вне заданных множеств.

Доказывается следующая

Теорема. *Пусть $Q_i\subset[0, 1]$; $i=1, 2$ совершенные нигде не плотные множества. Тогда для любой суммируемой функции $f(x, y)$ можно найти такую суммируемую функцию $g(x, y)$, что $g(x, y)=f(x, y)$ на $Q=Q_1\times Q_2$ и как сферические, так и прямоугольные частичные суммы двойных рядов Фурье—Хаара функций $g(x, y)$ сходятся к ней почти всюду.*

Аналогичный результат для двойных рядов Фурье (при требовании сходимости в метрике L^p, $0<p<1$) был установлен в работах ([4]) и ([5]) автора.

Отметим, что идея улучшения сходимости ряда Фурье путем изменения разлагаемой функции вне заданных множеств принадлежит Д. Е. Меньшову ([6]), которым установлено, что если $f(x)\in L[0, 2\pi]$ и $Q\subset[0, 2\pi]$ совершенное нигде не плотное множество, то можно найти такую функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ на Q и ряд Фурье функции $g(x)$ сходится почти всюду.

Напомним определение системы Хаара

$$\chi_0^{(0)}(t)\equiv 1; \quad \chi_k^{(j)}(t)=\begin{cases} \sqrt{2^k}; & t\in\left(\frac{2j}{2^{k+1}};\ \frac{2j-1}{2^{k+1}}\right) \\ -\sqrt{2^k}; & t\in\left(\frac{2j}{2^{k+1}};\ \frac{2j}{2^{k+1}}\right) \\ 0; & t\notin\left(\frac{j-1}{2^k},\ \frac{j}{2^k}\right) \end{cases}$$

где для каждого $k=1, 2\ldots$ индекс j пробегает значения $1, 2\ldots 2^k$

$$\chi_1(t)\equiv\chi_0^{(0)}(t); \quad \chi_n(t)\equiv\chi_k^{(j)}(t); \quad n=2^k+j;$$

(значения функций Хаара в точках разрыва для нас несущественны и мы их не проводим).

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье—Хаара функции $f(x, y)\in L(T)$ обозначим, соответственно, через $S_{n,m}[f]$ и $S_R[f]$:

$$S_{n,m}[f]=\sum_{k,l=1}^{n,m} a_{k,l}\chi_k(x)\cdot\chi_l(y); \; S_R[f]=\sum_{k^2+l^2\leq R^2} a_{k,l}\chi_k(x)\chi_l(y); \; a_{k,l}=$$

$$=\iint_T f(t, \tau)\chi_k(t)\chi_l(\tau)dtd\tau.$$

Через $|E|$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества E.

Характеристическую функцию множества $E\subset[0, 1]$ обозначим через $\beta_E(t)$.

Частичные суммы ряда Фурье—Хаара функции $f(t)\in L[0, 1]$ обозначим через $S_n(t, f)$; известно, что для любого $k=0, 1, \ldots$

$$S_{2^k}(t, f)=|\Delta_k^{(i)}|^{-1}\int_{\Delta_k^{(i)}} f(t)dt, \; t\in\Delta_k^{(i)}=\left[\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}\right], \quad 1\leq i\leq 2^k$$

интервалы вида $\Delta_k^{(i)}$ называются интервалами Хаара.

Основным средством для доказательства теоремы является следующая

Лемма. *Пусть даны* $Q_i\subset[0, 1]$, $i=1, 2$, *совершенные нигде не плотные множества, натуральные числа* N_0 *и* ν_0. *Тогда для любой ступенчатой функции* $f(x, y)$ *(квадраты постоянства которой имеют вид* $\Delta_q^{(s)}\times\Delta_q^{(l)}$, $q\geq 1$, $1\leq s\leq 2^q$, $1\leq l\leq 2^q$) *существуют ступенчатая функция* $g(x, y)$, *измеримое множество* E *и натуральное число* M *такие, что:*

1) $g(x, y)=f(x, y)$ на $Q=Q_1\times Q_2$;

2) $\iint_T |g(x, y)|dxdy\leq 4\iint_T |f(x, y)|ddxy$;

3) $|E|>1-2^{1-\nu_0}$;

4) $|S_{n,m}[g]|\leq 2^{\nu_0}|f(x, y)|$, *при* $(x, y)\in E$, $n, m=1, 2, \ldots$;

5) $S_{n,m}[g]\equiv 0$, *при* $\min(n, m)<2^{N_0}$, $(x, y)\in T$;

6) $S_{n,m}[g]=g(x,y)$ п. в. *на* T *при* $\min(n,m)\geqslant M$.

Доказательство леммы. Пусть $\Delta_{s,l}=\Delta_s\times\Delta_l$ квадраты постоянства функции $f(x,y)$ и $f(x,y)=\gamma_{s,l}$ при $(x,y)\in\Delta_{s,l}$; $1\leqslant s,\ l\leqslant 2^q$, где $\Delta_s\equiv\Delta_q^{(s)}$.

Так как $Q_j (j=1,2)$ совершенные нигде не плотные множества, то можно найти интервалы Хаара $\{\delta_p^{(j)}\}$, $j=1,2$ одинаковой длины $|\delta_p^{(j)}|=\delta$ такие, что

$$\delta_p^{(j)}\subset\left[\frac{p-1}{2^N},\ \frac{p}{2^N}\right];\quad (1\leqslant p\leqslant 2^N;\ \ (j=1,2));\quad Q_j\cap\delta_p^{(j)}=\varnothing, \tag{2}$$

где
$$N=N_0+q. \tag{3}$$

Положим
$$f_s^{(j)}(t)=\beta_{\Delta_s}(t)\cdot\left[1-2^{-N}\delta^{-1}\sum_{p=(s-1)\cdot 2^{N_0}}^{s\cdot 2^{N_0}}\beta_{\delta_p^{(j)}}(t)\right]; \tag{4}$$

$$g_{s,l}(x,y)=\gamma_{s,l}\cdot f_s^{(1)}(x)\cdot f_l^{(2)}(y):g(x,y)=\sum_{s,l=1}^{2^q}g_{s,l}(x,y); \tag{5}$$

$$A=\left\{[0,1]\setminus\sum_{p=1}^{2^N}\left[\frac{p}{2^N}-\frac{1}{2^{N+\nu_0}},\ \frac{p}{2^N}\right]\right\};\quad E=A\times A. \tag{6}$$

Докажем, что функция $g(x,y)$ и множество E удовлетворяют условиям леммы.

Из (2), (4) и (5) следует, что $g_{s,l}(x,y)=\gamma_{k,l}$ при $(x,y)\in Q=Q_1\times Q_2$, следовательно $g(x,y)=f(x,y)$ при $(x,y)\in Q$.

Ввиду того, что $|\Delta_s|=2^{-q}$ и $q=N-N_0$, из (4) и (5) получим

$$\iint_T|g(x,y)|dxdy=\sum_{s,l=1}^{2^q}\iint_{\Delta_{s,l}}|g_{s,l}(x,y)|dxdy=$$

$$=\sum_{s,l=1}^{2^q}|\gamma_{s,l}|\left[\int_{\Delta_s}\left|1-2^{-N}\cdot\delta^{-1}\cdot\sum_{p=(s-1)\cdot 2^{N_0}}^{s\cdot 2^{N_0}}\beta_{\delta_p^{(1)}}(x)\right|dx\right]\cdot\left|\int_{\Delta_l}\right|1-2^{-N}\times$$

$$\times\delta^{-1}\sum_{p=(s-1)2^{N_0}}^{s\cdot 2^{N_0}}\beta_{\delta_p^{(2)}}(y)\bigg|dy\leqslant\sum_{s,l=1}^{2^q}|\gamma_{s,l}|[|\Delta_s|+2^{-N}\delta^{-1}2^{N_0}\cdot\delta]\cdot[|\Delta_l|+$$

$$+2^{-N}\delta^{-1}2^{N_0}\cdot\delta]=\sum_{s,l=1}^{2^q}|\gamma_{s,l}|[|\Delta_s|+2^{-q}]\cdot[|\Delta_l|+2^{-q}]=$$

$$=4\cdot\sum_{s,l=1}^{2^q}|\gamma_{s,l}||\Delta_{s,l}|=4\iint_T|f(x,y)|dxdy,$$

т. е. условия 1) и 2) леммы выполнены; очевидно, что $|E|>1-2^{1-\nu_0}$ (см. (6)).

Теперь проверим выполнение условий 4) и 5) леммы. Для этого нам нужны нижеследующие оценки частичных сумм вида $S_{2^k}(t,f_l^{(j)})$, $1\leqslant l\leqslant 2^q$, $j=1,2$:

1°) Если $k\leqslant N$, то $S_{2^k}(t,f_l^{(j)})=0$ при $t\in[0,1]$, для всех l. В самом деле, пусть $t\in[0,1]$, тогда при некотором i $t\in\Delta_k^{(i)}$, следовательно из (1) имеем

$$S_{2^k}(t, f_l^{(j)}) = |\Delta_k^{(i)}|^{-1} \int\limits_{\Delta_k^{(i)}} f(t)dt; \tag{7}$$

отсюда и ввиду того, что при $1\leqslant p<2^N$

$$\int\limits_{\left[\frac{p-1}{2^N};\ \frac{p}{2^N}\right]} f_l^{(j)}(t)dt=0$$

непосредственно следует

2°) Если $N<k\leqslant N+\nu_0$, то $S_{2^k}(t, f_l^{(j)})=0$ при $t\notin\Delta_l$ и $|S_{2^k}(t, f_l^{(j)})|<2^{\nu_0}$ при $t\in A\cap\Delta_l$. Действительно, так как $f_l^{(j)}(t)=0$ при $t\in\Delta_l'$ и интервалы $\Delta_k^{(i)}$ лежат либо на Δ_l, либо на $[0, 1]\setminus\Delta_l$, то из (7) получаем первое равенство. Пусть $t\in\Delta_l$, тогда при некотором i $t\in\Delta_k^{(i)}$ и из (4) и (7) вытекает, что $S_{2^k}(t, f_l^{(j)})=1$, если $\Delta_k^{(i)}\subset A\cap\Delta_l$, а если $\Delta_k^{(i)}\neq\Delta_k^{(i)}\cap A\neq\varnothing$, то существует единственное натуральное число p_0, такое, что $\delta_{p_0}^{(j)}\subset\Delta_k^{(i)}$. Из определения функции $f_l^{(j)}(t)$ и из того, что $|\delta_{p_0}^{(j)}|=\delta$ и $|\Delta_k^{(i)}|=2^{-k}$, получим

$$S_{2^k}(t, f_l^{(j)}) = \frac{1}{|\Delta_k^{(i)}|}\int\limits_{\Delta_k^{(i)}}[1-2^{-N}\delta^{-1}\cdot\beta_{\delta_{p_0}^{(j)}}(t)]dt = 1-\frac{2^{-N}}{2^{-k}};$$

отсюда, поскольку $k\leqslant N+\nu_0$, сразу получим $|S_{2^k}(t, f_l^{(j)})|<2^{\nu_0}$.

3°) Если $k>N+\nu_0$, то $S_{2^k}(t, f_l^{(j)})=0$ при $t\notin\Delta_l$ и $S_{2^k}(t, f_l^{(j)})=1$ при $t\in A\cap\Delta_l$. Это непосредственно следует из (4) и (7), так как в этом случае либо $\Delta_k^{(i)}\subset A$, либо $\Delta_k^{(i)}\notin A$.

Легко видеть, что если $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$, то $S_n(t, f_l^{(j)})\equiv S_{2^k}(t, f_l^{(j)})$ или $S_n(t, f_l^{(j)})=S_{2^{k+1}}(t, f_l^{(j)})$ для любых l, j, $1\leqslant l\leqslant 2^q$, $j=1, 2$ (это следует из определения системы Хаара).

Следовательно для любых l и j, $1\leqslant l\leqslant 2^q$, $j=1, 2$, имеем

1°°) $S_n(t, f_l^{(j)})=0$ при $t\in[0, 1]$ если $n\leqslant 2^N$;

2°°) $S_n(t, f_l^{(j)})=0$ при $t\notin\Delta_l$ и $|S_n(t, f_l^{(j)})|<2^{\nu_0}$ при $t\in A\cap\Delta_l$ для всех $n=1, 2, \ldots$

Пусть $(x, y)\in E$, тогда для некоторых s' и l' $(x, y)\in E\cap\Delta_{s',l'}$, следовательно из определения функции $g(x, y)$ и из условия 2°°) для всех n и m получим

$$|S_{n,m}[g]| = \left|\sum_{s,l=1}^{2^q}\gamma_{s',l'}S_n(x, f_s^{(1)})\cdot S_m(y, f_l^{(2)})\right|\leqslant 2^{2\nu_0}|\gamma_{s',l'}|.$$

Отсюда вытекает выполнение условия 4) леммы.

Из определения функции $g(x, y)$ и из условия 1°°) при $\min(n, m)<2^N$ для всех $(x, y)\in T$ следует, что $S_{n,m}[g]=0$.

Поскольку проекции прямоугольников постоянства функции являются интервалами Хаара, то существует натуральное число M такое, что

$$S_{n,m}[g]\equiv g(x, y), \text{ п. в. на } T, \min(n, m)\geqslant M.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f(x, y)$ суммируемая функция и $Q_i\subset[0, 1]$, $i=1, 2, \ldots$ совершенные нигде не плотные множества. Легко видеть, что можно определить последовательность функций $\{f_s(x, y)\}_{s=1}^{\infty}$ (каждая из которых принимает постоянные значения на квадратах, проекции которых являются интервалами Хаара), обладающую следующими свойствами:

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s(x, y)\overset{\text{п.в}}{=}f(x, y), \qquad \iint_T |f_s(x, y)|dxdy<2^{-4q}, \quad q\geqslant 2.$$

Если N_s заранее заданное натуральное чосло, то в силу леммы существуют ступенчатая функция $g_s(x, y)$, измеримое множество E_s и натуральное число M_s такие, что:

$$g_s(x, y)=f_s(x, y), \text{ на } Q=Q_1\times Q_2; \tag{9}$$

$$\iint_T |g_s(x, y)|dxdy\leqslant 4\iint_T |f_s(x, y)|dxdy; \tag{10}$$

$$|E_s|>1-2^{1-s}; \quad E_s\subset T; \tag{11}$$

$$|S_{n,m}[g_s]|\leqslant|f_s(x, y)|; \quad (x, y)\in E_s, \ n, m=1, 2\ldots; \tag{12}$$

$$S_{n,m}[g_s]=0, \quad \min(n, m)\leqslant N_s, \quad (x, y)\in T; \tag{13}$$

$$S_{n,m}[g_s]=g_s(x, y) \text{ п. в. на } T, \min(n, m)\geqslant M. \tag{14}$$

Таким образом, для фиксированого s определяются функции $g_s(x, y)$ множества E_s и натуральное число M_s, удовлетворяющие условиям (9)—(14), при этом, очевидно, можно взять

$$N_1=1, \ N_s=M_{s-1}+1, \quad s=2, 3\ldots \tag{15}$$

Из условий (9) и (10) вытекает, что функция $\sum_{s=1}^{\infty} g_s(x, y)$ суммируема и равна $f(x, y)$ на $Q=Q_1\times Q_2$.

Положим $$A_s=\{(x, y)\in T, \ |f_s(x, y)|<2^{-2s}\}; \tag{16}$$

очевидно, что $$|A_s|>1-2^{-s} \tag{17}$$

Докажем, что прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье—Хаара функции $g(x, y)$ сходятся к ней на множестве E:

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{s=k}^{\infty}(A_s\cap E_s). \tag{18}$$

В самом деле, если $(x, y)\in E$, то существует натуральное число k_0 такое, что $(x, y)\in A_k\cap E_k$ при $k\geqslant k_0$. Ввиду того, что $S_{n,m}[g]=$ $=\sum_{k=1}^{\infty} S_{n,m}[g_k]$, из условий (13) и (14) и при $N_{s+1}<\min(n, m)\leqslant N_{s+2}$, $s>k_0$, имеем

$$S_{n,m}[g]-g(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}[S_{n,m}[g_k]-g_k(x,y)]=\sum_{k=1}^{s}[S_{n,m}[g_k]-g_k(x,y)]+$$

$$+S_{n,m}[g_{s+1}]+\sum_{k=s+2}^{\infty}S_{n,m}[g_k]+\sum_{k=s+1}^{\infty}g_k(x,y)=0+S_{n,m}[g_{s+1}]+\sum_{k=s+1}^{\infty}g_k(x,y)+$$

$$+0.$$

Отсюда, так как $(x, y)\in E_{s+1}$ и $(x, y)\in A_{s+1}$, и из условий (12)—(16) получим $|S_{n,m}[g]-g(x, y)|\leqslant 2^s\cdot 2^{-2s}+\sum_{k=s+1}^{\infty}g_k(x, y)$.

Но поскольку $|E|=1$ (см. (11), (16), (17), (18)),

следовательно $\lim\limits_{n,m\to\infty} S_{n,m}[g]\overset{\text{п.в.}}{=}g(x, y)$.

Легко видеть, что система Хаара обладает следующим свойством: для любых $g(x, y)\in T$ и $R>0$ существуют натуральные числа n и m, зависящие от точки (x, y), и числа R такие, что $S_R[g]\equiv S_{n,m}[g]$. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема верна также для $n\geqslant 3$ кратных рядов Фурье—Хаара.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ինտեգրալի ֆունկցիաների Ֆուրյե—Հաարի կրկնակի շարքերի զուգամիտության մասին

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Եթե $Q_i\subset[0, 1]$, $i=1, 2$ ամենուրեք նոսր կատարյալ բազմություններ են, ապա կամայական $f(x, y)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի ինտեգրելի ֆունկցիա $g(x, y)$, որն օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

1. $g(x, y)=f(x, y)$; $(x, y)\in Q=Q_1\times Q_2$

2. *$g(x, y)$ ֆունկցիայի Ֆուրյե—Հաարի կրկնակի շարքի սֆերիկ և ուղղանկյուն մասնական գումարները զուգամիտում են իրեն համարյա ամենուրեք։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. П. Дзагнидзе*, Собщ. АН ГрузССР, т. 34, № 2 (1964). [2] *Г. Г. Кемхадзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 85, № 3 (1977). [3] *Г. Г. Кемхадзе* Тр. Тбилисского мат. ин-та, т. 55 (1977). [4] *М. Ж. Григорян*, Изв. АН АрмССР, сер. мат., т. 15, № 1 (1980). [5] *М. Ж. Григорян*, ДАН АрмССР, т. 73, № 2 (1981). [6] *Д. Е. Меньшов*, ТММО. №1. 1952.