ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 5

УДК 537.312.5:539.6

МЕХАНИКА

М. В. Белубекян

О статической устойчивости токонесущей пластинки

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 8/IX 1981)

М. А. Леонтовичем и В. Д. Шафрановым было показано, что провод с постоянным электрическим током может потерять устойчивость ([1]) аналогично тому, как сжатый стержень теряет устойчивость в смысле Эйлера. В дальнейшем этому вопросу были посвящены и другие исследования, в том числе ([2–4]). Трудность его решения заключается в том, что несмотря на допустимость одномерного подхода к упругому стержню задача остается существенно трехмерной вследствие необходимости решения уравнений электродинамики, как в области, занимаемой телом стержня, так и в области, окружающей стержень.

В настоящей работе рассматривается статическая устойчивость тонкой пластинки, служащей проводником электрического тока с заданной плотностью, равномерно распределенной по толщине пластинки. Модель бесконечной пластинки позволяет вместо пространственной задачи рассматривать двумерную. Это обстоятельство дает возможность получить достаточно обоснованное значение критической плотности тока, при которой пластинка теряет устойчивость, и значительно упрощает решение задачи. На основе решения задачи устойчивости бесконечной пластинки дается метод решения для соответствующей пластинки с конечными размерами.

1. Пусть слой толщиной $2h$ из достаточно хорошо проводящего материала служит для транспортировки стационарного электрического тока с плотностью J_0.

Прямоугольная координатная система (x_1, x_2, x_3) выбирается так, чтобы начало координат лежало в срединной плоскости слоя, ось ox_1 совпала с направлением электрического тока и ось ox_3 была перпендикулярна срединной плоскости слоя. При таком выборе координатной системы слой занимает область

$$(-\infty<x_1<\infty,\quad -\infty<x_2<\infty,\quad -h\leq x_3\leq h).$$

Ток в слое создает собственное магнитное поле, которое направлено по оси ox_2 и определяется следующим образом (в абсолютной гауссовой системе единиц):

$$H_0=-4\pi c^{-1}J_0x_3,\quad |x_3|\leq h. \tag{1.1}$$

Выражение H_0 из (1.1) вытекает из уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot}\vec{H}_0=4\pi c^{-1}\vec{J}_0. \tag{1.2}$$

Остальные величины определяются из следующих связей:

$$\vec{E}_0=\sigma^{-1}\vec{J}_0;\quad \vec{B}_0=\mu\vec{H}_0. \tag{1.3}$$

Вследствие электромагнитного поля на упругий слой будет действовать объемная сила

$$\vec{R}_0=c^{-1}(\vec{J}_0\times\vec{B}_0). \tag{1.4}$$

Решая уравнения статики для упругого слоя при отсутствии поверхностной нагрузки и при наличии объемной силы (1.4), получим для напряжений следующие выражения

$$\sigma_{11}^0=\sigma_{22}^0=\frac{2\pi\mu\lambda J_0^2}{(\lambda+2G)c^2}(x_3^2-h^2);\quad \sigma_{33}^0=\frac{2\pi\mu J_0^2}{c^2}(x_3^2-h^2). \tag{1.5}$$

Из (1.5) видно, что максимальные напряжения достигаются для σ_{33}^0 при $x_3=0$. Так как максимальное напряжение должно быть меньше предела прочности, то отсюда следует, что плотность электромагнитного поля должна быть ограничена определенной величиной

$$J_0<J_s=\frac{c}{h}\sqrt{\frac{\sigma_s}{2\pi\mu}}. \tag{1.6}$$

Вычисления показывают, что характерная величина $2hJ_s$ для металлов имеет порядок 10^5-10^6 а/см.

2. Рассмотрим новое деформированное состояние слоя, которое будем называть возмущенным по отношению к приведенному выше начальному состоянию. Предполагается, что начальные и возмущенные упругие перемещения малы и поэтому справедливы следующие уравнения равновесия ([3])

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{jk}^0\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+X_i'=0,\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \tag{2.1}$$

где u_i—компоненты перемещений возмущенного состояния, X_i'—компоненты возмущения объемной силы вследствие изменения направления электрического тока.

Представляя характерные величины возмущенного электромагнитного поля в виде $\vec{J}_0=\vec{J}_0+\vec{j}$, $\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h}$, $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{e}$, уравнения магнито- и электростатики, определяющие возмущения электромагнитного поля, приведем к виду (6)

$$\operatorname{rot}\vec{h}=4\pi c^{-1}\vec{j},\quad \operatorname{div}\vec{h}=0,\quad \vec{j}=\sigma\vec{e},\quad \operatorname{rot}\vec{e}=0. \tag{2.2}$$

Из выражения

$$\vec{R}=\mu c^{-1}(\vec{J}\times\vec{H})$$

возмущенной объемной силы имеем

$$\vec{R}'=\mu c^{-1}(\vec{J}_0\times\vec{h}+\vec{j}\times\vec{H}_0+\vec{j}\times\vec{h}). \tag{2.4}$$

Следует отметить, что уравнения (2.2) линейны относительно возмущений, а выражение (2.4) содержит нелинейный член.

В дальнейшем для простоты рассматривается частный случай возмущенного состояния, когда возмущения не зависят от координаты x_2.

Для определения возмущений электромагнитного поля используется условие непротекания тока через поверхности, ограничивающие слой ($\vec{n}$ — нормаль поверхности)

$$\vec{J}\cdot\vec{n}=0 \text{ при } x_3=\pm h. \tag{2.5}$$

При условии малости упругих деформаций условие (2.5) приводится к виду

$$j_3=J_0\partial u_3/\partial x_1, \quad x_3=\pm h. \tag{2.6}$$

Для постановки задачи к условиям (2.6) необходимо присоединить также следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}=0, \quad x_3=\pm h. \tag{2.7}$$

Уравнения равновесия (2.1) с учетом (1.5), (2.4) и связи между напряжениями и деформациями приводятся к следующей форме:

$$G\Delta u_1+(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\frac{2\pi\mu}{c^2}J_0^2\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2G}(x_3^2-h^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(x_3^2-h^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right]\right\}+\frac{\mu J_0}{c}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}x_3-\frac{\mu}{4\pi}h_2\frac{\partial h_2}{\partial x_1}=0;$$
$$\tag{2.8}$$
$$G\Delta u_3+(\lambda+G)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\frac{2\pi\mu}{c^2}J_0^2\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2G}(x_3^2-h^2)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(x_3^2-h^2)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\right\}+\frac{\mu J_0}{c}h_2+\frac{\mu J_0}{c}\frac{\partial h_2}{\partial x_3}x_3-\frac{\mu}{4\pi}h_2\frac{\partial h_2}{\partial x_3}=0.$$

Входящее в (2.8) неизвестное h_2, согласно (2.2), удовлетворяет уравнению

$$\Delta h_2=0, \quad |x_3|\leqslant h. \tag{2.9}$$

Таким образом, задача приводится к решению уравнений (2.8), (2.9) с граничными условиями (2.6), (2.7), причем в уравнениях (2.8) участвуют нелинейные члены. Из первого уравнения системы (2.2) и условия (2.6) следует оценка $|h_3|\sim 4\pi c^{-1}J_0|u_3|$. Используя оценку для h_2 и условие ограниченности тока (1.6), получаем, что нелинейными членами можно пренебречь соответственно с первыми членами уравнений (2.8), так как $|u_3|\sigma_s/(hG)\ll 1$.

3. Пусть периодические по координате x_1 упругие возмущения слоя таковы, что отношение толщины слоя к длине волны мало, так что в отношении слоя можно применять гипотезу Кирхгофа.

Тогда вместо второго уравнения из (2.8) следует рассматривать следующее уравнение относительно прогиба пластинки:

$$Dw^{\mathrm{IV}}-M_0''+T_0+Z+m_1'=0, \tag{3.1}$$

где

$$M_0=\int\limits_{-h}^{h} X_3\sigma_{11}^0\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_3;\quad T_0=\int\limits_{-h}^{h}\left(\sigma_{33}''\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\sigma_{11}^0\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)dx_3;$$

$$Z=\int\limits_{-h}^{h} X_3' dx_3;\quad m_1=\int\limits_{-h}^{h} x_3X_1' dx_3; \tag{3.2}$$

D—жесткость пластинки; x_1', x_3'—соответствующие компоненты силы (2.4); штрих—производные по координате x_1.

Сравнение членов уравнения (3.1) с индексом нуль с первым членом показывает, что при условии (1.6) этими членами можно пренебречь.

Подставляя в (3.2) значения X_1', X_2' без нелинейных членов, учитывая граничные условия (2.6), уравнение (3.1) приведем к виду

$$Dw^{\text{IV}}=\frac{8\pi\mu}{c^2}J_0^2hw+\frac{\mu J_0}{c}\left(\int\limits_{-h}^{h}x_3^2h_2dx_3\right)''. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) необходимо решать с уравнением (2.9) с учетом граничных условий (2.6). Представляя искомые решения в виде

$$w=w_0\exp(-ikx_1),\quad h_2=q(x_2)\exp(-ikx_1)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.6), легко получить для $q(x_3)$ выражение

$$q(x_3)=\frac{4\pi}{c}J_0w_0\frac{\operatorname{ch}kx_3}{\operatorname{ch}kh}. \tag{3.4}$$

Из (3.4) видно, что в приближении тонкой пластинки можно считать, что $q(x_3)$ не зависит от координаты x_3. Подстановка (3.4) в (3.3) показывает, что последним членом в уравнении (3.3) также можно пренебречь. Окончательно, уравнение статической устойчивости токонесущей пластинки приводится к виду

$$Dw^{\text{IV}}=8\pi\mu c^{-2}J_0^2hw. \tag{3.5}$$

Согласно (3.5) критическая плотность электрического тока определяется по формуле

$$J_*=\alpha k^2,\quad \alpha^2=c^2D/(8\pi\mu h). \tag{3.6}$$

В случае достаточно широкой пластинки-полосы $(0\leqslant x_1\leqslant l)$ невозмущенное электромагнитное поле мало отличается от поля бесконечной пластинки, поэтому уравнение статической устойчивости такой пластинки будет приближенно описываться уравнением (3.5). Тогда, если пластинка-полоса шарнирно оперта по краям $x_1=0,\ l$, для минимального значения критической плотности тока получается выражение (3.6), где $k=\pi/l$. В этом случае численные расчеты показывают, что для алюминиевой пластинки-полосы шириной $l=20$ см, толщиной $2h=0,1$ см $J_*=1,76$ ка/см, если же $l=40$ см, то $J_*=0,44$ ка/см^2.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Հոսանքատար սալի ստատիկ կայունության մասին

Ենթադրվում է, որ էլեկտրական հոսանքը հավասարաչափ բաշխված է ըստ սալի հաստության։ Սալի նախնական լարվածությունը արհամարհվում է։

Ցույց է տրվում, որ սալի ձևը փոխելու հետևանքով առաջանում են հոսանքով պայմանավորված նոր ուժեր, որոնք բերում են սալի կայունության կորուստի։

Դիտարկված են երկու մասնավոր խնդիրներ՝ երբ սալը հոդակապորեն ամրակցված է իր եզրերով և երբ սալի մի եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ ազատ է։ Գտնված են էլեկտրական հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքները, որի դեպքում սալը կորցնում է կայունությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Леонтович, В. Д. Шафранов,* в кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1958. [2] *Н. И. Долбин, А. И. Морозов,* Журн. прикладной механики и техн. физики, № 3, 1966. [3] *Ю. В. Вандакуров, Э. Н. Колесников,* Журн. техн. физики, т. 37, вып. 11 (1967). [4] *S. Chattopadhyay,* F. Moon. J. Appl. Mech., № 42 (1975). [5] *В. В. Новожилов,* Теория упругости, Судпромгиз, Л., 1958. [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957. [7] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян,* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. [8] Вибрации в технике, т. 1, гл. 11, Машиностроение, М., 1978.