ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 5

УДК 517.956

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карапетян

Существование и поведение решений одного класса гипоэллиптических уравнений в неограниченных областях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/XII 1981)

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$P(x,\ D)=\sum_{(\alpha,\mu)<2m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{1}$$

где для $m_j\in N(j=1,\ \ldots,\ n)$ и $m=\max\limits_{1\leq j\leq n} m_j$, $\mu=\left(\frac{m}{m_1},\ \ldots,\ \frac{m}{m_n}\right)$, а $a_\alpha(x)\in$ $\in C^{(m)}(\overline{\Omega})$ вещественные функции. И пусть

$$P_0(x,\ D)=\sum_{(\alpha,\mu)=2m} a_\alpha(x)D^\alpha\ .$$

главная часть оператора (1).

Сначала предполагается, что оператор (1) равномерно семиэллиптический в Ω, т. е. существует постоянная $A>0$ такая, что для всех $x\in\Omega$, $\xi\in R_n$

$$A^{-1}(|\xi_1|^{2m_1}+\ldots+|\xi_n|^{2m_n})\leq|P_0(x,\xi)|\leq A(|\xi_1|^{2m_1}+\ldots+|\xi_n|^{2m_n}). \tag{2}$$

Операторы типа (1), удовлетворяющие условию (2) для ограниченных областей, изучены, например, в книге ([1]). В этой заметке оператор (1) рассматривается для некоторых неограниченных областей.

Определение 1 (см. ([2])). Для замкнутого ограниченного множества $E\subset\Omega\subseteq E_n$ положим

$$\operatorname{cap}_2^\mu(E)=\inf_f\int\limits_{E_n}\sum_{(\alpha,\mu)=m}(D^\alpha f)^2dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $f\in C_0^\infty(\Omega)$, обращающимся в единицу в некоторой окрестности множества E.

$\operatorname{Cap}_2^\mu(E)$ называется n-мерной μ-гармонической емкостью порядка m, относительно множества Ω в смысле Мазьи.

Положим $Q(x^0,\ d)\equiv Q(x^0,\ d,\ \mu)=\left\{x\in E_n,\ |x_i-x_i^0|<\frac{d^{\mu_i}}{2},\ i=1,\ \ldots,\ n\right\}$.

Для замкнутого множества $E\subset Q(x^0,\ d)$ обозначим через $\mathbf{B}_{Q(x^0,\ d)}(E)$ множество функций, $u\in C^\infty(Q(x^0,\ d))$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности E и $d^{-|\mu|}\int\limits_{Q(x^0,d)}u^2dx=1$.

Определение 2 (см. [3]). Для замкнутого множества $E\subset Q(x^0, d)$ положим

$$l_d^\mu(E)=\inf\{|u|^2_{m.d},\ u\in\mathbf{B}_{Q(x^0,d)}(E)\},$$

где

$$|u|_{m.d}=\left(\sum_{j=1}^{m} d^{2(j-m)}\sum_{(\alpha,\mu)=j}\|D^\alpha u\|^2_{L_2(Q(x^0,d))}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Число $l_d^\mu(E)$ называется n-мерной μ-гармонической емкостью компакта E порядка m в смысле Кондратьева.

Как и в случае гармонических емкостей (см. [2]), использовав свойства анизотропного пространства С. Л. Соболева $H_m^\mu(\Omega)$, можно доказать

Лемму 1. *Существуют положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что для любого компакта $E\subset Q(0, d)\equiv Q(d)$*

$$K_1\,\mathrm{cap}^\mu_{Q(2d)}(E)\leqslant l_d^\mu(E)\leqslant K_2\,\mathrm{cap}^\mu_{Q(2d)}(E).$$

Определение 3 (см. [4]). Пусть r и γ произвольные положительные числа. Будем говорить, что область G имеет μ-внутренний диаметр меньший r с точностью до μ-емкости γ порядка m, если для любой точки $x^0\in E_n$

$$\mathrm{cap}^\mu(Q(x^0, r)\setminus G)>\gamma r^{|\mu|-2m}.$$

В работе [4] Е. М. Ландисом исследовано поведение решений эллиптических уравнений для таких неограниченных областей, которые имеют малый внутренний диаметр.

В заметке изучаются подобные вопросы для семиэллиптических уравнений. Для решений этих уравнений справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть M и γ произвольные положительные числа. Существует положительное число $r_0=r_0(M, \gamma)$ такое, что если $r<r_0$, область G с μ-внутренним диаметром меньшим r с точностью до емкости γ порядка m расположена в прямоугольнике $Q(4)$ и $u(x)$ слабое решение уравнения $P(x, D)u=f$ в G, удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на той части Γ границы области G, которая расположена строго внутри $Q(4)$, то*

$$\int\limits_G u^2dx\geqslant M\int\limits_{Q(1)\cap G} u^2dx-\int\limits_G f^2dx. \tag{3}$$

Пусть теперь $G\subset E_n$ неограниченная область и в G определено слабое решение уравнения $P(x, D)u=0$, удовлетворяющее нулевым условиям Дирихле на ∂G. Тогда имеет место следующая альтернатива.

Теорема 1 *(типа Фрагмена—Линделефа). Пусть γ и r положительные числа и G область с μ-внутреним диаметром меньшим r с точностью до μ-емкости γ порядка m. Существует $r_0=r_0(\gamma, P)$ такое, что при $r<r_0$ либо $u\equiv 0$, либо*

$$\varlimsup_{\rho\to\infty}\left(\int\limits_{Q(\rho)} u^2dx\right)e^{-\frac{r_0\rho}{r}}>0. \tag{4}$$

(Здесь функция u считается продолженной нулем вне G).

Доказательство. Подберем такое число K, чтобы прямоугольник $Q(4)$ можно было покрыть прямоугольниками $Q(x^i, 1)$, $i=1, \ldots, K$, и положим $M=e^6K$. Найдем по лемме 2 число r_0, соответствующее этому M и данному γ. Пусть $u \not\equiv 0$. Тогда существует прямоугольник $Q(x^0, 1)$ такой, что

$$\int\limits_{Q(x^0,1)} u^2 dx = a > 0.$$

И по лемме 2 имеем

$$\int\limits_{Q(x^0,4)} u^2 dx > M \int\limits_{Q(x^0,1)} u^2 dx.$$

Итак, как это делается в работе ([4]), можно построить последовательность точек $\{x^k\}$ $k=0, 1, 2 \ldots$ таких, что

$$|x_i^k - x_i^{k-1}| < 4^{\mu_i}, \quad i=1, \ldots, n,$$

$$\int\limits_{Q(x^k,1)} u^2 dx > e^6 \int\limits_{Q(x^{k-1},1)} u^2 dx.$$

Отсюда при достаточно больших k имеем

$$\int\limits_{Q(6k)} u^2 dx > \int\limits_{Q(x^k,1)} u^2 dx > e^{6k} a.$$

Откуда и следует утверждение теоремы при $r=r_0$.

Случай $r<r_0$ получается посредством преобразования

$$y_i = x_i \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu_i}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Для решений рассматриваемого оператора справедлив своеобразный принцип максимума, а именно:

Теорема 2. *Пусть область G расположена в прямоугольнике $Q(R)$, $R>4$. Для всякого $\gamma>0$ найдется такое $r_0>0$, что если $r<r_0$, G имеет μ-внутренний диаметр меньший r с точностью до емкости γ порядка m и $u(x)$ является слабым решением уравнения $P(x, D)u=0$, удовлетворяющим нулевым условиям Дирихле на той части границы G, которая расположена строго внутри прямоугольника $Q(R)$.*

Пусть

$$\sup_{\substack{(R-4)^{\mu_i} < |x_i| < R^{\mu_i} \\ \exists i,\ i=1, \ldots, n}} \int\limits_{Q(x,1)} u^2 dx = m.$$

Тогда для всякой точки $x^0 \in Q(R)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q(x^0,1)} u^2 dx \leqslant m. \tag{5}$$

Для регулярных ограниченных областей С. М. Никольским в работе [5] доказаны теоремы существования и единственности задачи Дирихле для оператора (1). Если теперь в теореме 1 область G ограничена, то мы получим в добавление к теоремам единственности С. М. Никольского следующую теорему единственности для семиэллиптических уравнений

Теорема 3. *Пусть G ограниченная область $f \in L_2(G)$, тогда для всякого $\gamma > 0$ найдется число $r_0 = r_0(\gamma)$ такое, что если $r < r_0$ и G имеет μ-внутренний диаметр меньший r с точностью до μ-емкости γ порядка m, то уравнение $P(x, D)u = f$ имеет не более одного решения из класса $H^{\mu}_{m}(G)$*

Если наложить еще некоторые ограничения на рост функции $u(x)$ при $|x| \to \infty$, то теорема 1 позволяет получить теоремы существования и единственности и для некоторых неограниченных областей.

Теорема 4. *Пусть в неограниченной области G определен оператор $P(x, D)$. Для всякого $\gamma > 0$ найдется такое $r_0 > 0$, что если $r < r_0$ и μ-внутренний диаметр области G меньше r с точностью до емкости γ порядка m, то справедливо следующее:*

пусть функция $f(x) \in L_2^{loc}(G)$ такова, что

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \left(M_\rho(f) \,/\, e^{\frac{1}{4}\frac{r_0}{r}\rho}\right) < 0. \tag{6}$$

Тогда существует и притом единственное слабое решение $u(x)$ уравнения $P(x, D)u = f$ в $\overset{\circ}{H}{}^{\mu}_{m}(G)$ такое, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \left(M_\rho(u) \,/\, e^{\frac{r_0}{r}\rho}\right) = 0, \tag{7}$$

где

$$M_\rho(u) \sup_{\substack{|x_l| = \rho^{\mu_l} \\ \exists l,\ l=1,\dots,n}} \int_{Q(x,1)} u^2 dx.$$

Теперь мы будем отказываться от регулярности оператора (1) т. е. могут существовать точки $\xi \in R_n^{(0)} = \{\xi \in R_n,\ \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$ такие, что $P_0(\xi)$, главная часть многочлена $P(\xi)$, обращается в нуль в этих точках.

Обозначим $2m_1 = \max\limits_{\alpha} \{(\mu, \alpha) < 2m,\ \gamma_\alpha \neq 0\}$ и представим оператор с постоянными коэффициентами $P(D)$ в виде

$$P(D) = P_0(D) + \sum_{(\alpha,\mu) \leqslant 2m_1} \gamma_\alpha D^\alpha.$$

Предположим, что существуют точки $\{\alpha^i\}_1^n$, $\alpha^i = \{0, \dots, \alpha_i, \dots 0\}$ такие, что $\gamma_{\alpha^i} \neq 0$, $(\alpha^i, \mu) = 2m_1$, $i = 1, \dots, n$, и пусть существует многочлен $A(\xi)$ такой, что $A^2(\xi) = P_0(\xi)$. Будем предполагать, что оператор $P(D)$ удовлетворяет следующему условию: существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что

$$|A(\xi)|^2 + \sum_{(\alpha,\mu) \leqslant m_1} |\xi^\alpha|^2 \leqslant \varkappa(|P(\xi)| + 1), \quad \forall \xi \in R_n. \tag{8}$$

Решение будем искать в классе

$$H^{\{P\}}(G) = \{u;\ \|A(D)u\|_{L_2(G)} + \sum_{(\alpha,\mu)\le m_1} \|D^\alpha u\|_{L_2(G)} < \infty\}.$$

Обозначим через $\mathring{H}^{\{P\}}(G)$ замыкание множества $C_0^\infty(G)$ в норме

$$\|u\|_P = \|A(D)u\|_{L_2(G)} + \sum_{(\alpha,\mu)\le m_1} \|D^\alpha u\|_{L_2(G)}.$$

Тогда справедливы аналоги теорем 1 и 4 для решений нерегулярного оператора $P(D)$.

Теорема 5. *Пусть оператор* $P(D)$ *удовлетворяет условию* (8). *Пусть* $G \subseteq E_n$ *неограниченная область и в* G *определено слабое решение уравнения* $P(D)u=0$ *в классе* $\mathring{H}^{\{P\}}(G)$, *где* G *область с* μ*-внутренним диаметром меньшим* r *с точностью* μ*-емкости* $\gamma>0$ *порядка* m_1. *Существует* $r_0 = r_0(\gamma) > 0$ *такое, что при* $r<r_0$ *либо* $u \equiv 0$ *либо*

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \left(\int\limits_{Q(\rho)} u^2\, dx \right) e^{-\frac{r_0}{r}\rho} > 0.$$

Теорема 6. *Пусть* $G \subseteq E_n$ *неограниченная область и оператор* $P(D)$ *удовлетворяет условию* (8) *в* G. *Для всякого* $\gamma>0$ *найдется такое число* $r_0>0$, *что если* $r<r_0$ *и* μ*-внутренний диаметр области* G *меньше* r *с точностью до емкости* γ *порядка* m_1, *то справедливо следующее:*

пусть функция $f \in L_2^{\mathrm{loc}}(G)$ *такова, что*

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \left(M_\rho(f) / e^{\frac{1}{4}\frac{r_0}{r}\rho} \right) < \infty.$$

Тогда решение уравнения $P(D)u=f$ *в классе* $u(x) \in \mathring{H}^{\{P\}}_{\mathrm{loc}}(G)$, *удовлетворяющих условию*

$$\lim_{\rho\to\infty} \left(M_\rho(u) / e^{\frac{r_0}{r}\rho} \right) = 0,$$

существует и единственно.

Для ограниченной области G теоремы существования и единственности доказаны Г. Г. Казаряном ([6]).

Ереванский государственный университет

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Հիպոէլիպտիկ հավասարումների մի դասի լուծումների գոյությունը և վարքը անսահմանափակ տիրույթներում

Աշխատանքում հիպոէլիպտիկ հավասարումների մի դասի լուծումների համար ապացուցվում են Լյուվիլի և Ֆրագմեն-Լինդելյոֆի տիպի թեորեմներ փոքր μ ներքին տրամագիծ ունեցող անսահմանափակ տիրույթների համար։ Նշված թեորեմներն ապացուցվում են օգտվելով հայտնի ապրիորի գնահատականներից։ Մասնավորապես աշխատանքում ապացուցվում է հե-

տնյալը, որ եթե $G \subseteq E_n$ անսահմանափակ, փոքր և ներքին տրամագիծ ունեցող տիրույթ է, ապա $P(x,D)u=0$ հավասարման թույլ լուծման համար տեղի ունի հետևյալ ալտերնատիվան, կամ $u=0$, կամ

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}}\left(\int\limits_{Q(\rho)} u^2dx\right)e^{-C\rho}>0.$$

Օգտվելով այսպիսի թեորեմներից, աշխատանքում նշված օպերատորների համար ապացուցվում են $\exists$ և միակության թեորեմներ, այնպիսի u ֆունկցիաների համար $H^{\nu}_m(G)$ դասից, որոնց համար

$$\lim_{\rho\to\infty} M_\rho(u)e^{-C\rho}=0,$$

որտեղ՝

$$M_\rho(u)=\sup_{\substack{|x^i|=\rho^{\mu_i}\\ \exists i,\ i=1,\dots,n}}\int\limits_{Q(x,1)} u^2dx.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. Мир, М., 1975. [2] *В. Г. Мазья,* Сиб. мат. журн., т. 6, № 1 (1965). [3] *В. А. Кондратьев,* Тр. ММО, т. 16, № 1 (1967). [4] *Е. М. Ландис,* Тр. ММО, т. 31 (1974). [5] *С. М. Никольский.* ДАН СССР, т. 146, № 4 (1962). [6] *Г. Г. Казарян,* ДАН СССР, т. 251, № 1 (1980).