

УДК 519.833.5

МАТЕМАТИКА

Н. И. Наумова

О-доминирование в кооперативных играх

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 12/II 1982)

В данной работе для общей кооперативной игры $(I, A, w, \{P_i\}_{i \in I})$ предлагается новое отношение группового предпочтения. Для него изучаются условия непустоты C -ядра и существования внешне устойчивого C -ядра. В случае классической кооперативной игры вводится соответствующее новое отношение предпочтения на множестве дележей, называемое O -доминированием. Для классической кооперативной игры 3 лиц построены все НМ-решения ⁽¹⁾ для O -доминирования и показано, что НМ-решение всегда существует. Игра 10 лиц Лукаса, не имеющая НМ-решения для классического доминирования ⁽²⁾, имеет единственное НМ-решение для O -доминирования.

Общей кооперативной игрой называется набор $(I, A, w, \{P_i\}_{i \in I})$ где I — множество игроков, A — множество альтернатив, $|A| > 1$, w — характеристическая функция, т. е. отображение, ставящее в соответствие каждому $S \subset I$ множество $w(S) \subset A$, причем $w(\emptyset) = \emptyset$, $w(I) = A$, P_i — антирефлексивное отношение предпочтения игрока i на множестве альтернатив A . Обычно $w(S)$ трактуется как множество альтернатив, достижимых коалицией S , и рассматривается следующее отношение группового предпочтения $P = P(w, \{P_i\}_{i \in I})$ на множестве A : xPy , если существует такое $S \subset I$, что $x \in w(S)$ и xP_iy для всех $i \in S$.

Здесь будем трактовать $w(S)$ как множество альтернатив, неудовлетворенность которыми коалиция S имеет право высказывать, и рассматривать следующее отношение группового предпочтения $H = H(w, \{P_i\}_{i \in I})$ на множестве A : xHy , если существует такое $S \subset I$, что $y \in w(S)$ и xP_iy для всех $i \in S$.

C -ядром антирефлексивного отношения R на множестве A называется $C(A, R) = \{x \in A : \text{не } yRx \text{ для всех } y \in A\}$.

Множество $V \subset A$ называется внешне устойчивым для отношения R на A , если для любого $y \in A \setminus V$ существует $x \in V$, для которого xRy .

Множество $V \subset A$ называется внутренне устойчивым для отношения R , если не существуют $x, y \in V$, для которых xRy .

НМ-решением отношения R на A называется такое $V \subset A$, которое внешне и внутренне устойчиво для R на A .

В работе ⁽³⁾ для конечного A получено необходимое и доста-

точное условие непустоты $C(A, P(w, \{P_i\}_{i \in I}))$ при любых ациклических P_i и фиксированных I, A, w .

Теорема 1. Если множество альтернатив A конечно, то $C(A, H(w, \{P_i\}_{i \in I})) \neq \emptyset$ при любых ациклических P_i тогда и только тогда, когда $C(A, P(w, \{P_i\}_{i \in I})) \neq \emptyset$ при любых ациклических P_i .

Теорема 2. Пусть множества A, I конечны, тогда равносильны следующие утверждения:

1) $C(A, P(w, \{P_i\}_{i \in I}))$ внешне устойчиво на A для $P(w, \{P_i\}_{i \in I})$ при любых антирефлексивных транзитивных P_i ;

2) $C(A, H(w, \{P_i\}_{i \in I}))$ внешне устойчиво на A для $H(w, \{P_i\}_{i \in I})$ при любых антирефлексивных транзитивных P_i ;

3) при $|A| \geq 3$ существует такое $Q \subset I$, что $w(Q) = A$ и если $w(S) \neq \emptyset$, то $Q \subset S$. При $A = \{x, y\}$, если $x \in w(S_1)$, $y \in w(S_2)$, то $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Классической кооперативной игрой называется пара (I, v) , где I — множество игроков, v — функция, ставящая в соответствие каждому $S \subset I$ число $v(S)$ — максимальную сумму выигрышей, которую S может себе обеспечить, действуя самостоятельно. В качестве множества альтернатив берется $A = \{x \in R^{|I|} : x_i \geq v(\{i\}), i \in I, \sum_{i \in I} x_i = v(I)\}$, называемое множеством дележей. Отношения P_i фиксированы, $x P_i y$ тогда и только тогда, когда $x_i > y_i$. Обычно берут $w(S) = \{x \in A : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}$ и тогда отношение P является отношением доминирования, введенным в (1). Однако для произвольной v трудно трактовать элементы $w(S)$ как дележи, достижимые коалицией S .

Здесь для классической кооперативной игры рассмотрим прежнее P_i , $A \subset \{x \in R^{|I|} : \sum_{i \in I} x_i = v(I)\}$ и возьмем следующую w : $w(S) = \{x \in A : \sum_{i \in S} x_i < v(S)\}$, т. е. $w(S)$ — множество векторов выигрышей, при которых коалиция S обижена. Тогда получаем следующее отношение H на множестве A : $x H y$, если существует такое $S \subset I$, что $\sum_{i \in S} y_i < v(S)$ и $x_i > y_i$ при всех $i \in S$. (Для обиженной коалиции предпочтительнее любой вектор выигрышей, более выгодный всем ее членам). Такое отношение H будем называть O -доминированием.

Теорема 3. Если (I, v) — классическая кооперативная игра 3 лиц, то V — НМ-решение O -доминирования на $\bar{A} = \left\{ x \in R : \sum_{i=1}^3 x_i = v(I) \right\}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) V — НМ-решение O -доминирования на $A = \{x \in \bar{A} : x_i \geq v(\{i\}), i = 1, 2, 3\}$;

2) $V = \{x\}$, $x \in \bar{A}$, $x_i < v(\{i\})$, $x_j \leq v(\{j\})$, $x_k \leq v(\{k\})$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$;

3) $V = \{x \in \bar{A} : x_i = a, x_j \geq v(\{j\}), x_k \geq v(\{k\})\}$, где $v(I) - v(\{j, k\}) \leq a < v(\{i\})$.

Замечание. Теорема 3 верна и при замене $\bar{A}$ на симплекс, содержащийся в $\bar{A}$.

В дальнейшем будем искать НМ-решение на множестве дележей $A = \left\{ x \in R^3 : x_i \geq v(|i|), i=1, 2, 3, \sum_{i=1}^3 x_i = v(I) \right\}$. Тогда как и для

обычного доминирования можно считать, что v (0—1) редуцирована, т. е. $v(|i|) = 0, i=1, 2, 3, v(I) = 1, 0 \leq v(S) \leq v(I)$ для всех $S \subset I$

Обозначим $C = \{x \in A : x_i + x_k \geq v(i, k) \text{ для всех } i, k \in I\}$.

Теорема 4. Если (I, v) — классическая кооперативная игра 3 лиц с (0—1)-редуцированной v , то V — НМ-решение O -доминирования на $A = \left\{ x \in R^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \right\}$ тогда и только тогда, когда имеет место один из случаев:

1) $V = C \cup \{x \in A : 0 \leq x_k \leq v(i, k) + v(j, k) - 1, x_i = f_i(x_k), x_j = f_j(x_k)\}$, где f_i, f_j — непрерывные невозрастающие функции $x_k + f_i(x_k) + f_j(x_k) = 1, f_i(v(i, k) + v(j, k) - 1) = 1 - v(j, k), v(i, j) + v(i, k) \leq 1, v(i, j) + v(j, k) \leq 1$;

2) $V = C \cup \{x \in A : x_i + x_k = v(i, k)\} \cup \{x \in A : x_i + x_k = v(j, k)\}$ и $v(i, k) + v(j, k) \leq 1$ для некоторых i, j, k ;

3) $V = C \cup \{x \in A : x_i + x_j = v(i, j)\} \cup \{x \in A : 0 \leq x_k \leq 1 - 2v(i, j), x_i = f_i(x_k), x_j = f_j(x_k)\}$, где f_i, f_j — непрерывные невозрастающие функции, $x_k + f_i(x_k) + f_j(x_k) = 1, f_i(1 - 2v(i, j)) = v(i, j)$ и $v(i, j) + v(j, k) > 1, v(i, j) + v(i, k) > 1$;

4) $V = C \cup \{x \in A : b \leq x_k \leq a, x_i + x_k = v(i, k)\} \cup \{x \in A : b \leq x_k \leq a, x_j + x_k = v(j, k)\} \cup \{x \in A : x_k = a, x_i + x_k \leq v(i, k)\} \cup \{x \in A : x_k = a, x_j + x_k \leq v(j, k)\}$, где $b = \max\{1 - v(i, j), v(i, k) + v(j, k) - 1\}, b < a < \min\left\{\frac{1}{2}, v(i, k), v(j, k)\right\}$.

5) $V = C \cup \{x \in A : b \leq x_k \leq v(j, k), x_j + x_k = v(j, k)\} \cup \{x \in A : b \leq x_k \leq v(j, k), x_i + x_k = v(i, k)\} \cup \{x \in A : 0 \leq x_i \leq v(i, k) - v(j, k), x_j = f_j(x_i), x_k = f_k(x_i)\}$, где $b = \max\{1 - v(i, j), v(i, k) + v(j, k) - 1\}, f_j, f_k$ — невозрастающие непрерывные функции, $x_i + f_j(x_i) + f_k(x_i) = 1, f_k(v(i, k) - v(j, k)) = v(j, k)$ и $v(i, k) > v(j, k), v(i, k) + v(j, k) \leq 1$.

6) $V = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right\}$ и $v(i, j) > \frac{1}{2}$ для всех $i \neq j$;

7) $V = \{x \in A : x_k = a\}$, где $a < \frac{1}{2}, 1 - v(i, j) \leq a \leq v(i, k) + v(j, k) - 1$.

Следствие. Любая кооперативная игра 3 лиц имеет НМ-решение для O -доминирования на множестве дележей, так как любая v удовлетворяет хотя бы одному из условий, описанных в случаях 2), 3).

Игра Лукаса 10 лиц, не имеющая НМ-решения в случае обычного доминирования ⁽²⁾, имеет для О-доминирования единственное НМ-решение, не совпадающее с С-ядром.

Ленинградский государственный
университет

Ն. Ի. ՆԱՌԻՄՈՎԱ

Կոոպերատիվ խաղերի Օ-դոմինանտությունը

Դիտարկվում է ընդհանուր կոոպերատիվ խաղ և ապացուցվում է, որ եթե բաշխումների բազմությունը վերջավոր է, գերադասելիության H հարաբերությունը ծնված է ացիկլիկ P_1 հարաբերություններից, ապա այդ խաղի C -կորիզը ըստ H հարաբերության դատարկ չէ այն և միայն այն ժամանակ, երբ C -կորիզը դատարկ չէ ըստ P դոմինանտության հարաբերության:

Որպես օրինակ դիտարկվում են նաև կլասիկ կոոպերատիվ խաղեր, որոնց համար սահմանվում է Օ-դոմինանտության հարաբերությունը և խաղերի մի դասի համար նկարագրվում են ՆՄ-լուծումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Дж. фон Нейман, О. Моргештерн. Теория игр и экономическое поведение, М., 1970. ² W. F. Lucas, Bull. Amer. Math. Soc., v. 74, № 2 (1968). ³ Sh. Ishikawa, K. Nakamura, J. Oper. Res. Soc. Jap., v. 22, № 3 (1979).