ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 5

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

Т. Е. Кулаковская

Кооперативные игры, порожденные выпуклыми функциями выигрыша

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 12/II 1982)

То, что бескоалиционная игра n лиц естественным образом порождает кооперативную игру, было отмечено еще Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном [1]. Представляет интерес установить связь свойств полученной игры с исходной бескоалиционной моделью. В данной работе рассмотрена бескоалиционная игра с выпуклыми функциями выигрыша и доказано, что порожденная кооперативная игра имеет не пустое ядро. В качестве примера рассмотрена одна экономическая модель.

Пусть $I=\{1, \ldots, n\}$—множество игроков, $X^{(i)}$—выпуклый метрический компакт стратегий i-го игрока $(i=1, \ldots, n)$.

В результате независимого выбора игроками своих стратегий $x^{(i)}\in X^{(i)}$ они получают выигрыши $H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$. Подмножества $S\subseteq I$ будем называть коалициями. Обозначим

$$X^{(S)}=\prod_{i\in S} X^{(i)},$$

где $X^{(S)}$—множество стратегий коалиции S; оно также является выпуклым метрическим компактом. Положим

$$v(S)=\max_{x^{(S)}}\min_{x^{(I\setminus S)}}\sum_{i\in S} H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}).$$

Таким образом $v(S)$—это тот наибольший доход, который может обеспечить себе коалиция S коллективными действиями, если все остальные участники объединяются против нее, т. е. это наибольший гарантированный доход коалиции,

$$v(\{i\})=\max_{x^{(i)}}\min_{x^{(I\setminus i)}} H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

$$v(I)=\max_{x^{(I)}}\sum_{i=1}^{n} H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}).$$

Рассмотрим кооперативную игру $\langle I, v\rangle$. Множество исходов игры (дележей) обозначим через A.

$$A=\left\{(y_1, \ldots, y_n)\left|\sum_{i=1}^{n} y_i=v(I),\ y_i\geqslant v(\{i\})\quad i=1, \ldots, n\right.\right\}.$$

Пользуясь определением $v(S)$, легко показать, что $\sum_{i\in S}(v\{i\})\leqslant$

$\leqslant v(S)$ для всех $S \subseteq I$, так что объединение игроков в коалиции выгодно для них, и множество A не пусто.

Ядром (или C-ядром) игры $\langle I, v \rangle$ называется следующее подмножество $C \subseteq A$:

$$C = \left\{ y \in A \,\middle|\, \sum_{i \in S} y_i \geqslant v(S) \text{ для всех } S \subset I \right\}.$$

Теорема. *Пусть функции $H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ $(i = 1, \ldots, n)$ заданы на множестве $X^{(I)} = \prod_{j=1}^{n} X^{(j)}$, где $X^{(j)}$—выпуклые метрические компакты $(j = 1, \ldots, n)$ и вогнуты на этом множестве. Тогда кооперативная игра $\langle I, v \rangle$ с характеристической функцией*

$$v(S) = \max_{X^{(S)}} \min_{X^{(I \setminus S)}} \sum_{i \in S} H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

имеет непустое ядро.

В доказательстве используется известная теорема Бондаревой—Шепли о сбалансированных покрытиях ([2]).

Рассмотрим случай с „распадающимися" переменными, т. е.

$$H_i(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x^{(j)}),$$

где все функции $F_{ij}(y)$ выпуклы.
Тогда

$$v(I) = \max_{X^{(I)}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x^{(j)}) = \max_{X^{(I)}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(x^{(j)}) =$$

$$= \max_{X^{(I)}} \sum_{j=1}^{n} G_j(x^{(j)}) = \sum_{j=1}^{n} \max_{X^{(j)}} G_j(x^{(j)}) = \sum_{j=1}^{n} G_j(\mathring{x}^{(j)}).$$

Таким образом, для достижения общего суммарного дохода $v(I)$ i-й игрок должен применять стратегию $\mathring{x}^{(j)}$, максимизирующую его суммарный вклад в выигрыше всех участников. Полученный доход $v(I)$ можно согласно теореме разделить между участниками так, чтобы каждая коалиция S была удовлетворена (т. е. получила не менее чем $v(S)$).

Заметим, что если рассмотреть бескоалиционную игру с функциями выигрыша $H_i(x) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(x^{(j)})$, то равновесные стратегии $\bar{x}^{(j)}$ определяются из условия

$$F_{ii}(\bar{x}^{(i)}) = \max_{X^{(i)}} F_{ii}(x^{(i)}),$$

т. е. игроки должны максимизировать только свои „чистые" доходы.

Нетрудно убедиться, что $\sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{x}) \leqslant v(I)$ и во всех нетривиальных случаях неравенство строгое. Так что кооперативный подход имеет в данном случае преимущество по сравнению с бескоалиционным.

Применим полученный результат к одной экономической задаче.

Пусть имеется n участников и m тем. Каждый участник имеет капитал X_i, который он распределяет между темами. Пусть далее x_{ij}—вклад i-го участника в j-ю тему,

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=X_i;\quad x_{ij}\geqslant 0;\quad x^{(i)}=(x_{i1},\ \ldots,\ x_{im})$$

$x=(x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(n)})$—общее распределение капиталов по темам.

$\Phi_{ij}(x)=\Phi_{ij}(x_{1j},\ x_{2j},\ \ldots,\ x_{nj})$—доход i-го участника от j-й темы. Он зависит от вкладов всех участников в эту тему.

Общий доход i-го участника

$$H_i(x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(n)})=\sum_{j=1}^{n}\Phi_{ij}(x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(n)}).$$

Положим

$$\Phi_{ij}(x)=\Phi_{ij}(x_{ij}-\sum_{k\neq i}x_{kj}),$$

где $\Phi_{ij}(t)$—вогнутые возрастающие функции. Нетрудно видеть, что кооперативная игра, построенная по данной модели, удовлетворяет условиям теоремы, а, следовательно, имеет непустое ядро.

Ленинградский государственный университет

Տ. Ն. ԿՈՒԼԱԿՈՎՍԿԱՅԱ

Շահույթի ուռուցիկ ֆունկցիաներով ծնված կոոպերատիվ խաղեր

Դիտարկվում է շահույթի ուռուցիկ ֆունկցիա ունեցող n խաղացողների ոչ կոալիցիոն խաղ։ Ըստ Ջ. ֆոն Նեյմանի և Օ. Մորգենշտերնի «Խաղերի տեսություն և տնտեսագիտական վարք» մենագրության կառուցվում է կոոպերատիվ խաղ։ Ապացուցվում է, որ այդ խաղը ունի ոչ դատարկ C-կորիզ։

Որպես օրինակ դիտարկվում է տնտեսագիտական խնդիր, որտեղ մասնակցում են n կողմեր և առկա են m թեմաներ։

Ներկայացնելով այդ խնդիրը որպես n խաղացողների կոոպերատիվ խաղ և օգտվելով վերը ապացուցված թեորեմից, ապացուցվում է նաև այդ խաղի C-կորիզի դատարկ լինելը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн*, Теория игр и экономическое поведение, Наука, М., 1970. [2] *О. Н. Бондарева*, Проблемы кибернетики, вып. 10, М., 1963.