ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIV 1982 4

УДК 550.311

ГЕОФИЗИКА

С. Ц. Акопян

Вычисление крутильных колебаний Земли методом функционала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Т. Асланяном 27/IV 1981)

1. В работах [1,2] была построена теория возмущений для крутильных колебаний Земли во втором приближении, которая позволяет оценить область применения линейных соотношений между частотой и небольшими приращениями материальных параметров.

В данной работе описывается методика устойчивого счета добавок к частоте во втором приближении, а также «таблиц производных» в первом приближении от частот обертонов методом функционала [3].

2. При составлении программы был применен вариант метода прогонки по А. А. Абрамову [4]. Запишем систему дифференциальных уравнений для крутильных колебаний Земли [5] в виде

$$\begin{cases} \dot u_l = -\dfrac{1}{p(x)}\, v_l & v_l(0)=v_l(c)=0 \\ \dot v_l = q_l(x)\,u_l & (0\leqslant x\leqslant c), \end{cases} \tag{1}$$

где введены обозначения

$$p(x)=(1-x)^4\mu,\quad q_l(x)=\left[\varkappa_l^2\rho-\frac{\overline{N}}{(1-x)^2}\,\mu\right](1-x)^4. \tag{2}$$

Здесь и ниже индекс n—номер колебания—опущен, l—номер обертона, x—безразмерная глубина, точка означает дифференцирование по x.

Перейдем от функций u_l, v_l к новым функциям $r_l(x)$ и $\theta_l(x)$ [4]

$$u_l=r_l(x)\cos\theta_l,\qquad v_l=r_l(x)\sin\theta_l. \tag{3}$$

Тогда система (1) после простых преобразований запишется в виде:

$$\dot r_l=\left(q_l-\frac{1}{p}\right)\sin\theta_l\cos\theta_l; \tag{4}$$

$$\dot\theta_l=\frac{1}{p}\sin^2\theta_l+q_l\cos^2\theta_l. \tag{5}$$

Из (3) имеем $v_l/u_l=\operatorname{tg}\theta_l$, откуда находим граничные условия для функции $\theta_l(x)$

$$\theta_l(0)=0,\quad \theta_l(c)=l\pi,\quad l=0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{6}$$

Решая уравнение для $\theta_l(x)$ (5), (6), определим $\theta_l(x)$, затем, используя (4), по формулам (3) определим $u_l(x)$ и $v_l(x)$.

Собственные значения задачи (4)—(6) находятся „стрельбой" по параметру $\varkappa$: при данном $\varkappa$ граничное условие, заданное на одном конце интервала изменения x, с помощью уравнения (5) переносим на другой конец, проверяем выполнение там граничного условия и затем $\varkappa$ изменяем с учетом монотонной зависимости θ от $\varkappa$ на правом конце интервала.

После определения собственных значений возникает вопрос о вычислении собственных функций. Собственные функции $u_l(x)$ и $v_l(x)$ можно найти по формулам (3), причем прогоночное уравнение (5) надо интегрировать справа налево, в то время как вычисление собственных функций приходится вести в противоположную сторону [3].

Оказалось, что вычисление собственных функций $r_l(x)$, а следовательно, и u_l и v_l, приводит к большим погрешностям при увеличении номера колебания n и номера обертона l. Повышение точности решения приводит к сильному дроблению шага и увеличению времени счета.

В задаче о крутильных колебаниях Земли требуется вычисление не собственных функций, а некоторых функционалов от них. Для вычисления этих функционалов оказывается возможным получить дифференциальные уравнения, устойчиво считающиеся в ту же сторону, что и уравнение (5) [3]. Поскольку в [3] все функционалы имеют один и тот же верхний предел, мы строили функционалы от границ внутренних участков до поверхности, а сами значения функционалов на участках вычисляли как разности функционалов от концов данного участка.

Ниже описывается способ вычисления функционалов $k^l_{\rho i}$, $k^l_{\mu i}$, $a^{lk}_{\rho i}$, $a^{lk}_{\mu i}$ от собственных функций задачи (1), не требующих знания самих собственных функций.

3. Будем рассматривать случай счета справа налево, вводя новую переменную $x'=c-x$ в уравнения (1)—(5).

Разделим область $0\leqslant x\leqslant c$ точками $0=x_0<x_1<\ldots<x_s=c$ на конечное число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, предположим, что безразмерные плотность $\rho(x)$ и модуль сдвига $\mu(x)$ кусочно-постоянны на каждом из этих отрезков. При переходе к новому распределению $\rho\to\rho_0+\Delta\rho$ и $\mu\to\mu_0+\Delta\mu$ поправка по теории возмущений к безразмерной частоте $\varkappa_l$ в первом и втором приближении дается выражением

$$\varkappa_l=\varkappa_{0l}+\Delta\varkappa_{1l}+\Delta\varkappa_{2l}$$

$$\Delta\varkappa_{1l}=\sum_{i=1}^{s}\left[k^l_{\rho i}\Delta\rho_i+k^l_{\mu i}\Delta\mu_i\right] \tag{7}$$

$$\Delta\varkappa_{2l}=\sum_{i,j}^{s}\left[k^l_{\rho\rho,ij}\Delta\rho_i\Delta\rho_j+k^l_{\mu\mu,ij}\Delta\mu_i\Delta\mu_j+k^l_{\mu\rho,ij}\Delta\mu_i\Delta\rho_j\right],$$

где i, j—номера сферических слоев Земли, $k^l_{\rho i}$, $k^l_{\mu i}$, $k^l_{\rho\rho,ij}$, $k^l_{\mu\mu,ij}$, $k^l_{\mu\rho,ij}$ определены в [2].

Перейдем к вычислению этих коэффициентов, имеющих смысл частных производных.

4. Для случая счета справа налево выражение для $k^l_{\rho l}$ (²) запишется в виде

$$k^l_{\rho l}=\left\{-\frac{\varkappa_{0l}}{2}\int\limits_{c-x_l}^{c-x_{l-1}}dx(c_0+x)^4u_l^2\right\}\left\{\int\limits_0^c dx(c_0+x)^4\rho_0u_l^2\right\}^{-1}. \tag{8}$$

$$(c_0=1-c)$$

Введем вспомогательные функции:

$$U^l_{\rho l}(x)=\left\{-\frac{\varkappa_{0l}}{2}\int\limits_{c-x_l}^{x}dt(c_0+t)^4u_l^2\right\}\frac{1}{u_l^2+v_l^2}; \tag{9}$$

$$V_l(x)=\left\{\int\limits_0^x dt(c_0+t)^4\rho_0u_l^2\right\}\frac{1}{u_l^2+v_l^2}. \tag{10}$$

Продифференцируем (9), (10) и, используя (1)–(3), получим:

$$\dot U^l_{\rho l}=-2U^l_{\rho l}\left(\frac{1}{p}-q_l\right)\sin\theta_l\cos\theta_l-\frac{\varkappa_{0l}}{2}(c_0+x)^4\cos^2\theta_l, \tag{11}$$

$$\dot V_l=-2V_l\left(\frac{1}{p}-q_l\right)\sin\theta_l\cos\theta_l+(c_0+x)^4\rho_0\cos^2\theta_l. \tag{12}$$

Граничные условия для (11), (12) будут

$$U^l_{\rho l}(c-x_l)=0,\quad V_l(0)=0. \tag{13}$$

$k^l_{\rho l}$ находится по формуле

$$k^l_{\rho l}=\frac{U^l_{\rho l}(c)-U^l_{\rho l-1}(c)}{V_l(c)}. \tag{14}$$

Аналогично вычислялись $k^l_{\mu l}$.

Коэффициенты $k^l_{\rho\rho,ij}$, $k^l_{\mu\mu,ij}$ и $k^l_{\mu\rho,ij}$ выражаются через $a^{lk}_{\rho l}$ и $a^{lk}_{\mu l}$ (²). Запишем $a^{lk}_{\rho l}$ в виде

$$a^{lk}_{\rho l}=\left\{-\frac{\varkappa_{0l}^2}{\varkappa_{0l}^2-\varkappa_{0k}^2}\int\limits_{c-x_l}^{c-x_{l-1}}dx(c_0+x)^4u_lu_k\right\}\left\{\int\limits_0^c dx(c_0+x)^4\rho_0u_k\right\}^{-1}. \tag{15}$$

Введем вспомогательную функцию в виде

$$U^{lk}_{\rho l}(x)=\left\{-\frac{\varkappa_{0l}^2}{\varkappa_{0l}^2-\varkappa_{0k}^2}\int\limits_{c-x_l}^{x}dt(c_0+t)^4u_lu_k\right\}\frac{1}{(u_l^2+v_l^2)^{1/2}(u_k^2+v_k^2)^{1/2}}. \tag{16}$$

Действуя стандартным образом, получим

$$\dot{U}^{lk}_{\rho l} = -U^{lk}_{\rho l}\left[\left(\frac{1}{p} - q_l\right)\sin\theta_l\cos\theta_l + \left(\frac{1}{p} - q_k\right)\sin\theta_k\cos\theta_k\right] -$$

$$- \frac{\varkappa^2_{0l}}{\varkappa^2_{0l} - \varkappa^2_{0k}}(c_0 + x)^4\cos\theta_l\cos\theta_k, \tag{17}$$

$$U^{lk}_{\rho l}(c - x_l) = 0.$$

$a^{lk}_{\rho l}$ определится по формуле

$$a^{lk}_{\rho l} = \frac{U^{lk}_{\rho l}(c) - U^{lk}_{\rho l-1}(c)}{[V_l(c)V_k(c)]^{1/2}}\left(\frac{V_l}{V_k}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Аналогично вычислялись $a^{lk}_{\mu l}$.

Уравнения (11), (12), (17) устойчиво интегрируются совместно с уравнением (5) для $\theta_l(x)$ от 0 до c, а искомые функционалы определяются по формулам (14), (18).

5. Для счета коэффициентов нам надо прогонять с концов всех участков $[x_{l-1}, x_l]$ до c функции U. Это очень неудобно для многослойной модели Земли, так как с каждым последующим участком увеличивается число дифференциальных уравнений, счет которых требует большого количества времени. Для существенного сокращения времени счета функционалы на участках определялись пересчетом.

На каждом интервале интегрируем (11), (12), (16) с нулевыми начальными условиями и соответствующие им однородные уравнения, затем, используя рекурентную формулу, пересчитываем значения функционалов на правом конце интервала, зная ее значение на левом конце. Такая техника пересчета существенно сократила время счета.

Зная коэффициенты $k^l_{\rho l}$, $k^l_{\mu l}$, $a^{lk}_{\rho l}$, $a^{lk}_{\mu l}$, по формулам (²) вычисляли $k^l_{\rho\rho,lj}$, $k^l_{\mu\mu,lj}$, $k^l_{\mu\rho,lj}$. Выбор числа обертонов при вычислении этих коэффициентов определялся принятой точностью вычислений. Как правило, вычисления ограничивались первыми 12 обертонами.

Вычисления проводили в диапазоне изменения n от 2 до 5.

l	$T_м$, мин			
	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	43,61	28,23	21,62	17,84
1	12,56	11,52	10,46	9,498
2	7,413	7,205	6,951	6,657
3	5,131	5,058	4,968	4,859
4	3,851	3,823	3,784	3,738
5	3,094	3,080	3,059	3,035
6	2,583	2,575	2,563	2,548
7	2,218	2,213	2,205	2,196
8	1,944	1,941	1,896	1,894
9	1,729	1,727	1,723	1,719
10	1,556	1,554	1,551	1,548
11	1,414	1,413	1,411	1,408
12	1,298	1,297	1,296	1,294

В качестве исходной модели Земли была взята модель Гутенберга ([5]). В первом приближении вычислены периоды крутильных колебаний (таблица) и „таблицы производных“ $k^l_{\rho l}$ и $k^l_{\mu l}$ для обертонов $l=0\div 12$.

Во втором приближении были вычислены $k^l_{\rho\rho, lj}$, $k^l_{\rho\mu, lj}$ и $k^l_{\mu\mu, lj}$. Попутно для некоторых вариантов распределения Q с глубиной были вычислены диссипативные функции Q_l для обертонов от 1-го до 12.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук Армянской ССР

Ս. Ց. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Երկրի ոլորման տատանումների հաշվարկումը ֆունկցիոնալի մեթոդով

Նկարագրված է Երկրի ոլորման տատանումների հաճախականությունների փոփոխության կայուն հաշվարկը ֆունկցիոնալի մեթոդով։

Այդ մեթոդը հնարավորություն է տալիս խուսափել խնդրի սեփական ֆունկցիաների անմիջական հաշվարկումը հայտնի եղանակով, որը բերում է զգալի անճշտությունների՝ կապված տատանումների օբերտոնի համարի աճի հետ։

Հաշվված են Երկրի ոլորման տատանումների պարբերությունները 0 մինչև 12 օբերտոնների և $n=2\div 5$ համարների համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Ц. Акопян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов*, ДАН СССР, т. 204, № 3 (1972). [2] *С. Ц. Акопян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов*, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 3 1977. [3] *Е. С. Биргер*, ЖВМ МФ, т. 8, № 5 (1968). [4] *А. А. Абрамов*, ЖВМ МФ, т. I, № 2 (1961). [5] *В. Н. Жарков, В. М. Любимов, А. А. Мовчан* и др., в кн.: Земные приливы и внутреннее строение Земли, Наука, М., 1967.