ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 4

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян

О двух типах ортогональных интегральных соотношений для бесселевых функций и их приложениях к смешанным задачам

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 9/VI 1981)

Исследование напряженного состояния тел с концентраторами напряжений типа трещин, штампов, тонкостенных включений и накладок полубесконечных длин в постановке теории упругости или нелинейной теории установившейся ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном ([1-3]), обычно сводится к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами. Во многих случаях эффективные решения этих уравнений можно получить развитыми в ([4]) методами и методом ортогональных многочленов ([5-7]).

В настоящей работе устанавливаются два новых типа ортогональных интегральных соотношений на полубесконечном интервале для бесселевых функций первого рода, связанных с ядрами Коши и Карлемана. Предварительно устанавливается одно предельное соотношение для функций Якоби второго рода. При их помощи затем рассматривается задача о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости с конечным или полубесконечным разрезом.

Отметим, что изложенные здесь результаты позволяют получить эффективное решение ряда новых смешанных задач механики деформируемого тела и приводятся, как представляется автору, впервые.

1. Хорошо известно предельное соотношение ([8], с. 175, формула (41))

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z), \tag{1.1}$$

имеющее место для любых α и β равномерно в любой ограниченной области комплексной плоскости z. Здесь $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$—многочлены Якоби, а $J_\alpha(z)$—функция Бесселя первого рода. Получим аналогичное соотношение для функций Якоби второго рода $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)$ $(n=0, 1, \ldots)$. При этом (([8]), с. 172, формулы (19) и (20))

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)=-\frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)}P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)+2^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\times$$

$$\times(\zeta-1)^{-\alpha}(\zeta+1)^{-\beta}F\left(n+1,-n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{1-\zeta}{2}\right); \tag{1.2}$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta)=\frac{1}{2(\zeta-1)^\alpha(\zeta+1)^\beta}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}{\zeta-t}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt. \tag{1.3}$$

Здесь $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция Эйлера, $F(a, b; c, \zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а формула (1.3) справедлива в комплексной плоскости ζ, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$.

В (1.2) положим $\zeta=1-w^2/2n^2$, обе части умножим на $n^{-\alpha}$ и совершим предельный переход $n\to\infty$. Сначала будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} F\left(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{w^2}{4n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)\ldots(n+k)(-n-\alpha-\beta)\ldots(-n-\alpha-\beta+k-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(k-\alpha)k!}\left(\frac{w^2}{4n^2}\right)^k=$$

$$=\Gamma(1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)}\left(\frac{w}{2}\right)^{2k}=\Gamma(1-\alpha)\left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha}J_{-\alpha}(w).$$

Затем, принимая во внимание последнее равенство и (1.1), получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha}Q_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{w^2}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{w}{2}\right)^{-\alpha}[e^{-i\pi\alpha}J_{-\alpha}(w)-J_\alpha(w)].$$

Теперь в (1.3) положим $\alpha=-\dfrac{1}{2}-i\mu(-\infty<\mu<\infty)$, $\beta=\bar{\alpha}$ и

$$\zeta=1-\frac{w^2}{2n^2},\quad t=1-\frac{v^2}{2n^2}.$$

После элементарных операций придем к соотношению

$$Q_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}\left(1-\frac{w^2}{2n^2}\right)=e^{-i\pi\alpha}\left(2-\frac{w^2}{2n^2}\right)^{-\bar{\alpha}}w^{-2\alpha}\times$$

$$\times\int_0^{2n}\frac{v^{2\alpha+1}\left(2-\dfrac{v^2}{2n^2}\right)^{\bar{\alpha}}P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}\left(1-\dfrac{v^2}{2n^2}\right)dv}{v^2-w^2}.$$

Далее, обе части этого равенства умножим на $n^{-\alpha}$ и перейдем к пределу $n\to\infty$. Воспользовавшись (1.1) и (1.4), находим

$$\frac{\pi}{2\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{w}{2}\right)^{-\alpha}[e^{-i\pi\alpha}J_{-\alpha}(w)-J_\alpha(w)]=$$

$$=\left(-\frac{w^2}{2}\right)^{-\alpha}\int_0^{\infty}\frac{J_\alpha(v)v^{\alpha+1}dv}{v^2-w^2}.$$

Отсюда при помощи замены переменных

$$v=\lambda\sqrt{t},\quad w=\lambda\sqrt{z}\ (\lambda>0)$$

легко получим важное соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(\lambda\sqrt{t})\,dt}{t-z}=\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\mu)}[ie^{-\pi\mu}J_\alpha(\lambda\sqrt{z})-J_{-\alpha}(\lambda\sqrt{z})]z^{\frac{\alpha}{2}}, \tag{1.5}$$

справедливое в комплексной плоскости, разрезанной вдоль неотрицательной полуоси $[0, \infty)$. При этом под $\sqrt{z}$ понимается та однозначная аналитическая ветвь, которая на верхнем берегу разреза по лучу $[0, \infty)$ принимает положительное значение $\sqrt{x}$.

Наконец, пользуясь известными формулами Племеля—Сохоцкого из (1.5) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\lambda\sqrt{t})dt}{x-t} - i\,\mathrm{th}(\pi\mu)x^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\lambda\sqrt{x}) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\mu)} x^{\frac{\alpha}{2}} J_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x})$$

$$\left(\alpha = -\frac{1}{2} - i\mu;\quad \lambda > 0;\quad x > 0\right), \tag{1.6}$$

что и представляет собой одно из искомых ортогональных соотношений.

Заметим, что при $\lambda \to +0$ (1.6) даст соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha dt}{x-t} - i\,\mathrm{th}(\pi\mu)x^\alpha = 0. \tag{1.6$'$}$$

При предельном же переходе $z = x \pm i0$ $(x < 0)$, считая на отрицательной полуоси $z = (-x)e^{\pi i}$, опять из (1.5) получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\lambda\sqrt{t})dt}{t-x} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\mu)}\left[I_\alpha(\lambda\sqrt{-x}) - I_{-\alpha}(\lambda\sqrt{-x})\right](-x)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (x<0), \tag{1.7}$$

где $I_\alpha(x)$—модифицированная функция Бесселя первого рода.

Отметим, что (1.6) можно было бы получить из известного соотношения ([9])

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^{\bar{\alpha}}}{t-x}dt - i\,\mathrm{th}(\pi\mu)\times$$

$$\times P_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^{\bar{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{ch}(\pi\mu)} P_{n-1}^{(\bar{\alpha}+1,\alpha+1)}(x), & (n=1, 2\ldots) \\ 0, \quad (n=0) & (|x|<1) \end{cases} \tag{1.8}$$

при помощи замены переменных

$$x = 1 - \frac{u^2}{2n^2}, \qquad t = 1 - \frac{v^2}{2n^2} \tag{1.9}$$

и предельного соотношения (1.1). Однако использование (1.3) позволяет получить больше. А именно, кроме (1.6) получаются также (1.5) и (1.7).

Исходя же из известного соотношения ([10])

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{[a\,\mathrm{sgn}(t-x)+b]^\gamma P_n^{(\alpha-1,\mu-\alpha)}(t)dt}{|t-x|^\mu(1-t)^{1-\alpha}(1+t)^{\alpha-\mu}} = \frac{\pi A\Gamma(n+\mu)}{n!\Gamma(\mu)\sin(\pi\mu)}(a+b)^\gamma P_n^{(\mu-\alpha,\alpha-1)}(x)$$

$$(|x|<1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$A=\sqrt{1-2\cos(\pi\mu)a_*^{\alpha}+a_*^{2\alpha}};\quad a_*=\frac{b-a}{b+a}\qquad \operatorname{Re}A>0$$

$$\sin[\pi(\alpha-\mu)]=a_*^{\alpha}\sin(\pi\alpha)\quad (0<\operatorname{Re}\alpha<1;\quad 0<\mu<1),$$

при помощи (1.1) и (1.9) аналогичным образом получим следующие ортогональные интегральные соотношения:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{[a\,\mathrm{sgn}(x-t)+b]^{\alpha}t^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t})}{|x-t|^{\mu}}\,dt=$$

$$=\frac{2^{1-\mu}A}{\Gamma(\mu)\sin(\pi\mu)}(a+b)^{\alpha}\lambda^{\mu-1}x^{\frac{\alpha-\mu}{2}}J_{\mu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})\tag{1.10}$$

$$(\lambda,\ x>0);$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{[a\,\mathrm{sgn}(t-x)+b]^{\alpha}t^{\frac{\mu-\alpha}{2}}J_{\mu-\alpha}(\lambda\sqrt{t})\,dt}{|x-t|^{\mu}}=$$

$$=\frac{2^{1-\mu}A}{\Gamma(\mu)\sin(\pi\mu)}(a+b)^{\alpha}\lambda^{\mu-1}x^{\frac{1-\alpha}{2}}J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x}).$$

Соотношения (1.10) играют существенную роль в контактных и смешанных задачах в постановке работ ([1–3]).

Отметим, что при $\zeta\to x\pm i0$ $(|x|>1)$ из (1.3) получим соотношение

$$Q_n^{(\alpha,\bar\alpha)}(x)=\frac{\mathrm{sgn}\,x}{2|x-1|^{\alpha}|x+1|^{\bar\alpha}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\bar\alpha}P_n^{(\alpha,\bar\alpha)}(t)\,dt}{x-t}\qquad (|x|>1),\tag{1.11}$$

которое в известном смысле дополняет соотношение (1.8).

2. Задача о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости, содержащей произвольное число разрезов вдоль отрезков $[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2]\ldots[a_n,\ b_n]$ вещественной оси-линии соединения разнородных материалов, с точки зрения применения методов краевой задачи Римана—Гильберта рассматривалась в ([11,12]). Здесь приведем разрешающие интегральные уравнения этой задачи. Совокупность разрезов обозначим через L, а дополнительную ей область—L'. Без ограничения общности можно считать, что нагружены только берега разрезов. Пусть на верхних берегах разрезов действуют вертикальные и горизонтальные силы соответственно интенсивностей $q_0^+(x)$ и $\tau_0^+(x)$, а на нижних берегах такие же силы соответственно интенсивностей $q_0^-(x)$ и $\tau_0^-(x)$. Неизвестные вертикальные и горизонтальные контактные напряжения на L' обозначим соответственно через $\sigma(x)$ и $\tau(x)$. Введем обозначения

$$\chi_{\pm}(x)=\tau_{\pm}(x)+i\sigma_{\pm}(x);$$

$$\sigma_{\pm}(x)=\begin{cases}q_0^{\pm}(x), & x\in L\\ \sigma(x), & x\in L'\end{cases};\qquad \tau_{\pm}(x)=\begin{cases}\tau_0^{\pm}(x), & x\in L\\ \tau(x), & x\in L'\end{cases}.$$

Тогда, составляя скачок перемещений граничных точек верхней и нижней полуплоскостей, для определения функции $\chi(x)=\tau(x)+i\sigma(x)$ $(x\in L')$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$iA\chi(x)+B\int\limits_{L'}\frac{\chi(s)ds}{s-x}=g(x) \quad (x\in L'), \tag{2.1}$$

где

$$g(x)=-\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}\int\limits_L\frac{\chi_+(s)ds}{s-x}-\frac{\varkappa_2+1}{4\pi\mu_2}\int\limits_L\frac{\chi_-(s)ds}{s-x}.$$

После того как построено решение уравнения (2.1), производная раскрытия разрезов $\varphi(x)$ определится из соотношения

$$\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_+(s)ds}{s-x}+\frac{\varkappa_2+1}{4\pi\mu_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_-(s)ds}{s-x}+$$

$$+i\,\frac{\varkappa_1-1}{4\mu_1}\chi_+(x)-i\frac{\varkappa_2-1}{4\mu_2}\chi_-(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in L\\ 0, & x\in L'\end{cases}. \tag{2.2}$$

Здесь

$$A=\frac{\varkappa_1-1}{4\mu_1}-\frac{\varkappa_2-1}{4\mu_2}; \qquad B=\frac{\varkappa_1+1}{4\pi\mu_1}+\frac{\varkappa_2+1}{4\pi\mu_2};$$

$\mu_k(k=1,\ 2)$—модули сдвига материалов полуплоскостей, а $\varkappa_k(k=1,\ 2)$—постоянные Мусхелишвили. К уравнениям (2.1) и (2.2) должны быть добавлены условия непрерывности перемещений на концах L:

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}\varphi(x)dx=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots\ n). \tag{2.3}$$

Рассмотрим частный случай, когда имеется один разрез вдоль отрезка $[-1,\ 1]$ или по лучу $[0,\ \infty)$, которые в отдельности также обозначим через L. Кроме того, пусть $q_0^+(x)=q_0^-(x)=q_0(x)$ и $\tau_0^+(x)=\tau_0^-(x)=\tau_0(x)$ $(x\in L)$. Тогда $\chi_+(x)=\chi_-(x)=\chi(x)$ и вместо (2.2) получим следующее ключевое уравнение:

$$\chi(x)=\frac{B}{A^2-\pi^2B^2}\int\limits_L\frac{\varphi(t)dt}{t-x}-\frac{iA}{A^2-\pi^2B^2}\varphi(x) \tag{2.4}$$

$$(-\infty<x<\infty;\ A^2-\pi^2B^2\neq0).$$

Отсюда вытекает, что для определения $\varphi(x)$ получим уравнение

$$-i\frac{A}{\pi B}\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{\varphi(t)dt}{t-x}=f(x), \tag{2.5}$$

которое согласно (2.3) должно рассматриваться при условии

$$\int\limits_L\varphi(x)dx=0. \tag{2.6}$$

Здесь

$$f(x)=i\,\frac{A^2-\pi^2B^2}{\pi B}\,[q_0(x)-i\tau_0(x)]\quad (x\in L).$$

После решения уравнения (2.5) контактные напряжения на L' определятся из (2.4) при $x\in L'$.

Далее, положив

$$\mathrm{th}(\pi\mu)=\frac{A}{\pi B}\qquad \left(\mu=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\varkappa_1\mu_2+\mu_1}{\varkappa_2\mu_1+\mu_2}\right),$$

решение уравнения (2.5) в случае отрезка $L=[-1,1]$ представим в виде

$$\varphi(x)=\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}x_nP_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(x)\quad (|x|<1) \tag{2.7}$$

$$(\omega(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\bar{\alpha}}).$$

Из (2.6) непосредственно вытекает, что $x_0=0$. Для остальных коэффициентов при помощи (1.8) получим

$$x_n=2\mathrm{ch}(\pi\mu)f_{n-1}\quad (n=1,2,\ldots), \tag{2.8}$$

где

$$f_n=\frac{1}{h_n}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^{(\bar{\alpha}+1,\alpha+1)}(x)\frac{dx}{\omega(x)};$$

$$h_n=\frac{2\left|\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-i\mu\right)\right|^2}{[(n+1)!]^2}.$$

Для контактных напряжений из (2.4) с учетом (2.7), (2.8) и (1.11) будем иметь

$$\tau(x)+i\sigma(x)=-\frac{4B\mathrm{ch}(\pi\mu)}{A^2-\pi^2B^2}\,|x-1|^{\alpha}\,|x+1|^{\bar{\alpha}}\,\mathrm{sgn}\,x\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}Q_n^{(\alpha,\bar{\alpha})}(x)$$

$$(|x|>1).$$

Отсюда для коэффициентов интенсивности напряжений находим

$$A_1=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to-1-0}[\tau(x)+i\sigma(x)]|x+1|^{-\bar{\alpha}}=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}B}{(A^2-\pi^2B^2)\Gamma(1+\bar{\alpha})}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nf_{n-1}\Gamma(n+1+\bar{\alpha});$$

$$A_2=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1+0}[\tau(x)+i\sigma(x)]|x-1|^{-\alpha}=$$

$$=-\frac{2^{\bar{\alpha}+1}B}{(A^2-\pi^2B^2)\Gamma(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}\Gamma(n+1+\alpha).$$

В случае полубесконечного разреза $L=[0,\infty)$, при котором условие (2.6) следует заменить условием

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx<\infty, \tag{2.9}$$

решение интегрального уравнения (2.5) представим в виде*

$$\varphi(x)=x^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^\infty \Phi(\lambda)J_\alpha(\lambda\sqrt{x})d\lambda. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.5) и приняв во внимание (1.6), при помощи формул преобразования Ханкеля получим

$$\Phi(\lambda)=-\mathrm{ch}(\pi\mu)\int_0^\infty x^{1-\frac{\alpha}{2}}f(x)J_\alpha(\lambda\sqrt{x})dx.$$

Далее, учитывая (1.7), будем иметь

$$\tau(x)+i\sigma(x)=\frac{\pi B(-x)^{\frac{\alpha}{2}}}{(A^2-\pi^2B^2)\mathrm{ch}(\pi\mu)}\int_0^\infty \Phi(\lambda)[I_\alpha(\lambda\sqrt{-x})-I_{-\alpha}(\lambda\sqrt{-x})]d\lambda$$

$$(x<0),$$

откуда

$$A=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to-0}[\tau(x)+i\sigma(x)](-x)^{-\alpha}=$$

$$=\frac{2^{\alpha+1}B}{\mathrm{ch}(\pi\mu)(A^2-\pi^2B^2)}\int_0^\infty \lambda^\alpha\Phi(\lambda)d\lambda.$$

В заключение отметим, что формулу (2.10) можно интерпретировать также как решение известной задачи В. М. Абрамова ([13]) в случае полубесконечного штампа.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Բեսելի ֆունկցիաների համար օրթոգոնալ ինտեգրալ առնչությունների երկու տիպի և խառը խնդիրներում նրանց կիրառությունների մասին

Աշխատանքում արտածվում են Կոշու և Կաուլեմանի կորիզների հետ կապված նոր տիպի օրթոգոնալ ինտեգրալ երկու առնչություններ կիսաանվերջ միջակայքի վրա, որոնք պարունակում են առաջին սեռի Բեսելի ֆունկցիաներ։ Նախապես արտածվում է Յակոբիի երկրորդ սեռի ֆունկցիաների

* Вследствие (2.9) в формулу (2.10) не входит решение однородного уравнения (2.5), которое согласно (1.6′) имеет вид $\varphi(x)=Cx^{\frac{\alpha}{2}}$.