ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 4

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Г. С. Григорян

Двумерные предельные теоремы в модели с категорийными абсолютными приоритетами при единичной загрузке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Варшамовым 14/XII 1981)

1°. В теории массового обслуживания внимание исследователей начинают привлекать параметрические модели, позволяющие разработчикам ЭВМ на стадии проектирования подбором параметров найти модель, адекватно отражающую нужную ему ситуацию.

Один из способов построения параметрических моделей—квантование временной оси.

В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1, \ldots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания независимы, не зависят от процесса поступления и для i-вызовов имеют функцию распределения (ФР) $B_i(t)$, $B_i(+0)=0$.

Ось времен разделена на „кванты“ длины $T>0$: $[0, T)$, $[T, 2T)$, $[2T, 3T)$, ... i-вызов имеет относительный (схема (A, T)) или абсолютный с дообслуживанием (схема B, T)) приоритет перед j-вызовом $(1\leqslant i<j\leqslant r)$, если оба поступают в систему на одном и том же кванте. Вызовы всех потоков, поступающие на разных квантах, обслуживаются в порядке поступления. При $T=+\infty$ получаем обычные дисциплины относительного и абсолютного приоритета.

Обозначим через $w_k^T(t)$ $(k=\overline{1, r})$ виртуальное время ожидания (ВВО) k-вызова в момент t, через $\overline{w}_k^T(t)$—условное ВВО k-вызова в момент t при условии прекращения с момента t доступа вызовов в систему.

В работе [1] для схем (A, T) и (B, T) в терминах преобразований Лапласа—Стильтьеса найдены ФР процессов $\overline{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ $(k=\overline{1, r})$. Там же при $\rho_{r1}<1$, где

$$\rho_{k1}=a_1\beta_{11}+\ldots+a_k\beta_{k1} \quad \left(\beta_{k1}=\int_0^\infty t\,dB_k(t), \quad k=\overline{1, r}\right)$$

есть загрузка системы $\overline{1, k}$-вызовами (1-вызовами, ..., k-вызовами), описаны все возможные предельные ФР процессов $\overline{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ $(k=\overline{1, r})$ при $t=nT+\tau\to+\infty$ $(n>0;\ 0<\tau\leqslant T)$, когда одновременно меняются n, T и τ.

Обобщение результатов работы [1] для векторов $(\overline{w}_1^T(t), \ldots,$

$\overline{w}_r^T(t)$) и $(w_1^T(t), \ldots, w_r^T(t))$ в случае схемы (B, T) содержится в работе П. Т. Хостикяна ([2]).

Естественным образом возникает вопрос изучения предельных распределений для ВВО при $\rho_{r1} \geqslant 1$. Обсудим этот вопрос, например, для $\overline{w}_k^T(t)$ $(k=\overline{1, r})$ в схеме (B, T) при $\rho_{r1} \geqslant 1$. Момент времени t допускает единственное представление $t=nT+\tau$ $(n \geqslant 0;\ 0 < \tau \leqslant T)$. Обратимся при $t=nT+\tau \to +\infty$ к отношению τ/t. Ясно, что предельные при $t \to +\infty$ точки этого отношения полностью заполняют при произвольном изменении T интервал $[0, 1]$. Оказывается, что при некоторых ограничениях на ФР $B_i(t)$ $(i=\overline{1, r})$ для фиксированной предельной точки отношения τ/t существует своя предельная ФР процесса $\overline{w}_k^T(t)$ при $t \to +\infty$.

В работе ([2]) исследование схем (A, T) и (B, T) проводится при наличии следующих условий: если $s^+ \to 0$ $(\operatorname{Re} s \geqslant 0,\ s \to 0)$, то для

$$\beta_k(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dB_k(t)$$

имеют место разложения

$$\beta_k(s) = 1 - \beta_{k1} \cdot s + \alpha_k^{(\beta)} \cdot s^{\gamma(k)} + 0(s^{\gamma(k)}) \quad (1 < \gamma(k) \leqslant 2), \tag{1}$$

где $\alpha_k^{(\beta)}$ — положительные константы. Положим $(k=\overline{1, r})$:

$$\gamma_k = \min_{1 \leqslant i < k} \gamma(i), \quad L_k = \{i : i \leqslant k,\ \gamma(i) = \gamma_k\}, \quad B_k = \sum_{i \in L_k} a_i \alpha_i^{(\beta)}.$$

В работе ([2]) описан класс всех возможных предельных ФР для $\overline{w}_k^T(t)$ и $w_k^T(t)$ $(k=\overline{1, r})$ при $\rho_{r1} \geqslant 1$, $t=nT+\tau \to +\infty$ $(n \geqslant 0;\ 0 < \tau \leqslant T)$, произвольном изменении T и наличии условий (1) в схемах (A, T) и (B, T) при существовании некоторых предельных связей между t и τ, t и $T' = T - \tau$.

Например, при ρ_{r1} требуется существование пределов

$$\lim_{t \to +\infty} (\tau / t^{1/\gamma_r}) = b' \ (0 \leqslant b' \leqslant +\infty), \tag{2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} T' = T_0 \ (0 \leqslant T_0 \leqslant +\infty), \tag{3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (T' / t^{1/\gamma_r}) = d' \ (0 \leqslant d' \leqslant +\infty). \tag{4}$$

В настоящей работе результаты ([2]) при $\rho_{r1} = 1$ в случае схемы (B, T) обобщаются на двумерный случай.

2°. Для формулировки основных результатов введем обозначения. Обозначим через $W_k(x, y)$ и $\overline{W}_k(x, y)$ $(k=\overline{2, r-1})$ стационарные (безусловную и условную) ФР векторов $(w_{k-1}^\infty(t),\ w_k^\infty(t))$ и $(\overline{w}_{k-1}^\infty(t),\ \overline{w}_k^\infty(t))$ при $t \to +\infty$:

$$W_k(x) = W_k(+\infty, x), \quad \overline{W}_k(x) = \overline{W}'_k(+\infty, x).$$

ФР $\overline{W}_k(x, y)$ и $W_k(x, y)$ $(k=\overline{2, r})$ найдены в явном виде в работе ([3]).

Пусть $\bar{G}_\alpha(x)$ $(1<\alpha\leqslant 2;\ x\geqslant 0)$—положительный устойчивый закон с параметром α, определяемый своим преобразованием Лапласа—Стильтьеса ($\operatorname{Re} s\geqslant 0$; $\Gamma(x)$—гамма-функция Эйлера):

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\,\bar{G}_\alpha(x)=\exp\{s^\alpha\}\left\{1-\frac{s}{\Gamma(1/\alpha)}\int_0^\infty \exp\{-s^\alpha\cdot v\}v^{-(1-\alpha^{-1})}dv\right\}.$$

Положим $(k=\overline{1,r};\ x\geqslant 0)$:

$$\sigma_k=a_1+\ldots+a_k,\quad B_{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{k}(a_i/\sigma_k)B_i(x),$$

$$D(x)=\int_0^x\left\{e^{-\sigma_{k-1}u}+\int_u^x ue^{-\sigma_{k-1}v}\sum_{n\geqslant 1}v^{n-1}\frac{\sigma_{k-1}^n}{n!}d_vB_{(k-1)}^{n*}(v-u)\right\}d\,\overline{W}_k(x),$$

$$W_k^{T_0}(x)=\begin{cases}D(x),\ x\leqslant T_0,\\ D(T_0)+\overline{W}_k(x)*\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(\sigma_{k-1}\cdot T_0)^n}{n!}e^{-\sigma_{k-1}\cdot T_0}\cdot B_{(k-1)}^{n*}(x)-\end{cases}$$

$$\int_0^{T_0}\frac{(\sigma_{k-1}\cdot[T_0-u])^n}{n!}e^{-\sigma_{k-1}\cdot[T_0-u]}B_{(k-1)}^{n*}(x-u)dD(u),$$

если $x>T_0$,

$$d_k=\frac{\rho_{k-1}d'}{B_r^{1/\gamma_r}},\qquad d'_k=\frac{\rho_{k-1}{}_1d'}{B_r^{1/\gamma_r}},\qquad p_k=\frac{\rho_kb'}{B_r^{1/\gamma_r}},\qquad \rho_k=1-\rho_{k1}.$$

Здесь $*$—знак свертки, а B^{n*} есть n-кратная свертка B с собой.

Обозначим для схемы (A,∞) через $\pi_k(u)$ $(k=\overline{1,r});\ u>0)$ период занятости обслуживанием $\overline{1,k}$-вызовов с задержкой u, т. е. промежуток времени, начинающийся с задержки u, в начале которой вызовы в системе отсутствуют, а за u вызовы не обслуживаются, а только накапливаются, и завершающийся первым после задержки моментом освобождения системы от $\overline{1,k}$-вызовов.

В работе ([3]) в явном виде вычислены при $\rho_{k1}<1$ совместные вероятности $(k=\overline{2,r})$

$$P\{\pi_{k-1}(u)<x,\ \pi_k(v)<y\}=M_k(u,v;\ x,y)\quad 0<u\leqslant v,\ x\leqslant y).$$

Положим $(u>0;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ k=\overline{1,r})$:

$$V_k(u,x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\sigma_ku)^n}{n!}e^{-\sigma_ku}B_{(k)}^{n*}(x),\quad U_k(u,x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\sigma_ku)^n}{n!}e^{-a_ku}B_k^{n*}(x),$$

$$M_k(u,x)=P\{\pi_k(u)<x\},$$

$$I_1=\begin{cases}0,\ \text{если } T_0\geqslant\min(x,y)\\ \overline{W}^k(x,y)\overset{xy}{**}\int\limits_0^{\min(x,y)}U_{k-1}(T_0,y-u)d_uV_{k-2}(T_0,u)-\end{cases}$$

$$\int\limits_{u=0}^{T_0}\int\limits_{v=u}^{y}\int\limits_{w=0}^{T_0}\int\limits_{\lambda=0}^{\min(x,y-v+u)-w} U_{k-1}(T_0, y-(v-u)-w-\lambda)d_\lambda V_{k-2}(T_0-w, \lambda).$$

$$d_w M_{k-2}(u, w)d_u d_v \overline{W}_k(u, v), \text{ если } T_0<\min(x, y),$$

$$I_2=\begin{cases} 0, \text{ если } T_0\geqslant y, \\ \int\limits_{u=0}^{\min(x,T_0)}\int\limits_{v=0}^{y}\int\limits_{w=u}^{\min(x,T_0)}\int\limits_{\lambda=0}^{y-v+u-w} U_{k-1}(T_0, y-(v-u)-w-\lambda). \end{cases}$$

$$d_\lambda V_{k-2}(T_0-w, \lambda)d_w M_{k-2}(u, w)d_u d_v \overline{W}_k(u, v)-$$

$$\int\limits_{u=0}^{\min(x,T_0)}\int\limits_{v=0}^{T_0} V_{k-1}(T_0-v, y-v)d_u d_v W_k(u, v), \text{ если } T_0<y,$$

$$I_3=W_k(\min(x, y, T_0), \min(y, T_0)).$$

Здесь над знаком свертки указывается переменная, по которой свертка берется.

3°. Перейдем к формулировке основных результатов в случае схемы (B, T).

Теорема 1. *Пусть* $\rho_{r1}=1$, *существует передел* (2),

$$t=nT+\tau \quad (n\geqslant 0;\ 0<\tau\leqslant T).$$

а) *Если* $b'=+\infty$, *то существует предел* $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ k=\overline{2, r-1})$:

$$\lim_{t\to+\infty} P\{\overline{w}_{k-1}^T(t)<x,\quad \overline{w}_k^T(t)<y\}=\overline{W}_k(x, y).$$

б) *Если* $b'=+\infty$, *выполнены условия* (1), *то существует предел* $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0)$:

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\overline{w}_{r-1}^T(t)<x,\quad \frac{\overline{w}_r^T(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<y\right\}=\overline{W}_{r-1}(x)\bar{G}_{\gamma_r}(y).$$

в) *Если* $0\leqslant b'<+\infty$, *выполнены условия* (1), *то существует предел* $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ k=\overline{2, r})$:

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\frac{\overline{w}_{k-2}^T(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<x,\quad \frac{\overline{w}_k^T(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<y\right\}=\tilde{G}_{\gamma_r}(\min(x+p_{k-1},\ y+p_k)).$$

Теорема 2. *Пусть* $\rho_{r1}=1$, *существует предел* (2),

$$t=nT+\tau \quad (n\geqslant 0;\ 0<\tau\leqslant T).$$

а) *Если* $b'=+\infty$, *существует предел* (3), *то существует предел* $(x\geqslant 0;\ y\geqslant 0;\ k=\overline{2, r-1})$:

$$\lim_{t\to+\infty} P\{w_{k-1}^T(t)<x,\quad w_k^T(t)<y\}=I_1+I_2+I_3.$$

В частных случаях $T_0\geqslant y$ *и* $T_0=0$ *последнее предельное распределение принимает особенно простой вид. Оно равно* $W_k(x, y)$ *и* $\overline{W}_k(x, y)$ *соответственно.*

б) *Если* $b'=+\infty$, *выполнены условия* (1), *существуют пределы* (3) *и* (4), *то существует предел* ($x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$):

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{ w^T_{r-1}(t)<x, \quad \frac{w^T_r(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<y\right\}=W^{T_0}_{r-1}(x)\bar{G}_{\gamma_r}(y).$$

в) *Если* $0\leqslant b'<+\infty$, *выполнены условия* (1), *существует предел* (4), *то существует предел* ($x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $k=\overline{2, r}$):

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\frac{w^T_{k-1}(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<x, \ \frac{w^T_k(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<y\right\}=\bar{G}_{\gamma_r}(\min(x-d'_{k-1}+p_{k-1}, \ y-d'_k+p_k))-$$

$$-\bar{G}_{\gamma_r}(\min(x-d'_{k-1}+p_{k-1}, \ y-d'_k+p_k, \ d_{k-1}+p_{k-1}))+$$

$$+\bar{G}_{\gamma_r}(\min(x\rho_{k-2}+p_{k-1}, \ y-d'_k+p_k, \ d_{k-1}+p_{k-1}))-$$

$$-\bar{G}_{\gamma_r}(\min(x\rho_{k-2}-p_{k-1}, \ y-d'_k+p_k, \ d_k+p_k))+$$

$$+\bar{G}_{\gamma_r}(\min(x\rho_{k-2}+p_{k-1}, \ y\rho_{k-1}+p_k, \ d_k+p_k)).$$

Теоремы 1 и 2 описывают все возможные предельные законы для векторов

$$(\bar{w}^T_{k-1}(t), \ \bar{w}^T_k(t)), \quad (w^T_{k-1}(t), \ w^T_k(t)) \quad (k=\overline{2, r})$$

в схеме (B, T) при $t\to+\infty$ и $\rho_{r1}=1$.

Методы, использованные в работе, позволяют найти предельные распределения векторов $(\bar{w}^T_1(t), \bar{w}^T_2(t), \ldots, \bar{w}^T_r(t))$ и $(w^T_1(t), w^T_2(t), \ldots, w^T_r(t))$ при $t\to+\infty$ и $\rho_{r1}=1$.

Например, обобщение теоремы 1 на r-мерный случай имеет следующий вид.

Теорема 3. *Пусть* $\rho_{r1}=1$, *выполнены условия* (1), *существует предел* (2), $t=nT+\tau$ ($n\geqslant 0$; $0<\tau\leqslant T$).

1. *Если* $b'=+\infty$, *то существует предел* ($x_i\geqslant 0$; $i=\overline{1, r}$):

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\bar{w}^T_k(t)<x_k(k=\overline{1, r-1}), \ \frac{\bar{w}^T_r(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<x_r\right\}=\overline{W}(x_1, \ldots, x_{r-1})\bar{G}_{\gamma_r}(x_r),$$

где $\overline{W}(x_1, \ldots, x_{r-1})$ — *предельное распределение при* $t\to+\infty$ и $\rho_{r-11}<1$ *вектора* $(\bar{w}^\infty_1(t), \bar{w}^\infty_2(t), \ldots, \bar{w}^\infty_{r-1}(t))$.

2. *Если* $0\leqslant b'<+\infty$, *то существует предел* ($x_i\geqslant 0$; $i=\overline{1; r}$):

$$\lim_{t\to+\infty} P\left\{\frac{\bar{w}^T_k(t)}{(B_r t)^{1/\gamma_r}}<x_k(k=\overline{1, r})\right\}=\bar{G}_{\gamma_r}(\min_{1\leqslant i\leqslant r}(x_i+p_i)).$$

Отметим, что ФР $\overline{W}(x_1, \ldots, x_{r-1})$ в явном виде вычислена в ([3]).

Автор благодарит Э. А. Даниеляна за постановку задачи и ценные замечания.

Ереванский политехнический
институт

Գ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կատեգորիկ բացարձակ նախապատվություններով մոդելում միավոր ծանրաբեռնվածության դեպքում երկչափ սահմանային թեորեմներ

1—պահանջների, ..., r-պահանջների հոսքերով $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ *զանգվածային սպասարկման համակարգում ժամանակի առանցքը բաժանված է քվանտների՝* $[0, T), [T, 2T), [2T, 3T), \ldots$*։ i—պահանջը ունի բացարձակ նախապատվություն j պահանջի նկատմամբ* $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant r)$, *եթե երկուսն էլ մտնում են համակարգ նույն քվանտի ընթացքում։ Հակառակ դեպքում այդ պահանջները սպասարկվում են ըստ հերթականության։ Նշանակենք* $w_k^T(t)$*-ով* $(k=\overline{1, r})$ *k—պահանջի հնարավոր սպասման ժամանակը t պահին։* $\overline{w}_k^T(t)$*-ն՝ k—պահանջի պայմանական հնարավոր սպասման ժամանակն է t պահին այն պայմանի դեպքում, երբ t պահից արգելվում է պահանջների մուտքը համակարգ։*

Երբ $t\to+\infty$, *T-ն փոփոխվում է կամայական ձևով, համակարգի ծանրաբեռնվածությունը հավասար է մեկի,* $(\overline{w}_{k-1}^T(t))$, $\overline{w}_k^T(t)$ *և* $w_{k-1}^T(t)$, $w_k^T(t))$ $(k=\overline{2, r})$ *վեկտորների համար գտնված են բոլոր հնարավոր սահմանային բաշխման ֆունկցիաները։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Даниелян*, Кибернетика, № 6, 1980. [2] *П. Т. Хостикян*, Анализ моделей с категорийными во времени приоритетами, канд. дис., Ташкент, 1982. [3] *Г. С. Григорян, Э. А. Даниелян*, Межвузовский сб. по математике, Ереван, 1982.