ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

О слабой обратимости в некоторых пространствах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/XI 1981)

1°. Пусть G—открытое множество на комплексной плоскости C^1. И пусть $A(G)$—пространство всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Предположим далее, что X—линейное подпространство пространства $A(G)$, в котором множество всех многочленов от z всюду плотно.

Функция $f\in X$, $f(z)\neq 0$, $z\in G$ называется слабо обратимой в пространстве X (см. [1,2]), если существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty} P_n f=1,$$

причем сходимость имеет место в топологии пространства.

В этой заметке мы займемся следующими двумя задачами:

I. Пусть $\lambda(r)$ $\Lambda(r)$, $(\Lambda(r)\geqslant\lambda(r))$ монотонно растущие мажоранты на полуоси $(0, +\infty)$ и пусть

$$X_\lambda=\left\{f,\ f\in A(C^1):|f(z)|=o(\lambda(|z|)),\ |z|\to+\infty,\ \|f\|_{X_\lambda}=\sup_{z\in C^1}\frac{|f(z)|}{\lambda(|z|)}\right\},$$

аналогично определяется пространство X_Λ. Каким условиям должны удовлетворять мажоранты λ и Λ для того, чтобы каждая функция $f\in X_\lambda$, $f(z)\neq 0$, $z\in C^1$, была слабо обратной в пространстве X_Λ?

II. Пусть X—некоторое банахово пространство аналитических функций в единичном круге, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$i)\ zX\subset X,\quad ii)\text{ функционалы } \Phi_\zeta:$$

$$\Phi_\zeta(f)=f(\zeta),\ f\in X,\ |\zeta|<1,\ \text{непрерывны}$$

в топологии пространства X и множество всех многочленов от z всюду плотно в X.

Предположим далее, что

$$f\in X,\ f(z)\neq 0,\ |z|<1,\ \frac{1}{f}\in X.$$

Можно ли при этих условиях утверждать, что f слабо обратима в пространстве X?

Отметим, что аналогичная задача поставлена А. Шильдсом в ([3]). Теоремы 1 и 2 дают довольно полный ответ на указаные вопросы в том случае, когда мажоранты λ и Λ удовлетворяют некоторым условиям „регулярности".

2°. Для формулировки основных результатов заметки прежде всего введем некоторые определения.

Определение 1°. *Пусть λ—монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$, будем говорить, что λ принадлежит классу Ω, если функция $\varphi(r)=\lg\lambda(r)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) *для любого положительного числа A существует положительное число $B=B(A)$ такое, что*

$$\varphi(Ar)\leqslant B\varphi(r), \quad r\in(0, +\infty), \tag{1}$$

при этом $\varphi'\in C^1(0, +\infty)$;

б) *если же φ не удовлетворяет условию (1), то существует монотонно растущий вес $\omega(t)\geqslant 0$, $t\in(0, +\infty)$, такой, что*

$$\varphi(r)=\int_1^r \frac{\omega(u)}{u}\,du,$$

$$\omega(r)\uparrow +\infty, \text{ при } r\uparrow +\infty, \int^{+\infty} t\,\frac{\omega'(t)^2}{\omega(t)^3}\,dt<+\infty. \tag{2}$$

Определение 2. *Предположим, что мажоранта $\lambda\in\Omega$ и $\frac{\lambda'(r)r}{\lambda(r)}\uparrow+\infty$, при $r\uparrow+\infty$. В этом случае мы будем говорить, что λ принадлежит классу Ω^**

Теорема 1. *Пусть λ и Λ принадлежат классу Ω^* и пусть*

$$\lambda(r)(\lg\lambda(r))^n=O(\Lambda(r)), \text{ при } r\to+\infty,\ n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Предположим далее, что $\nu(t)$—функция обратная к функции $\frac{t\Lambda'(t)}{\Lambda(t)}$ и что $\lg\frac{\Lambda(\nu(e^t))}{\lambda(\nu(e^t))}$ выпуклая. Если, кроме того,

$$\int^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\lg\frac{\Lambda(\nu(t))}{\lambda(\nu(t))}\,dt=+\infty, \tag{3}$$

то каждая функция $f\in X_\lambda$, $f(z)\neq0$, слабо обратима в пространстве X_λ.

Замечание 1. *Простые примеры показывают, что при сходимости интеграла* (3) *утверждение теоремы, вообще говоря, не имеет места.*

Замечание 2. *Аналог этой теоремы для аналитических в круге функций, но при более жестких ограничениях на λ и Λ доказан в монографии Н. К. Никольского* ([2]).

Доказательство теоремы осуществляется на основе лемм 1—4.

Пусть $\lambda\in\Omega$, обозначим через U_λ класс субгармонических в C^1

функций, для которых существует положительное число $c=c(u)$ такое, что

$$u(z)\leqslant c\lg\lambda(|z|),\ z\in C^1. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть* $\lambda\in\Omega$, *функции* u *и* v *принадлежат классу* U_λ, *причем* $v(0)=1$. *Если* $w=u-v$ *субгармонична в* C^1, *то* $w\in U_\lambda$.

Доказательство этой леммы, в случае когда $\varphi=\lg\lambda$ удовлетворяет условию (1), легко вывести, используя теорему о средних значениях субгармонических функций. Если же φ удовлетворяет условию (2), то применяются результаты И. Ф. Красичков-Терновского [4,5]. Следующее утверждение на наш взгляд имеет самостоятельный интерес. Пусть $F\in X_\lambda$, обозначим через $Z(F)$ множество нулей функции F.

Следствие. *Пусть* $\lambda\in\Omega$, *пусть функции* f *и* g *принадлежат классу* X_λ *и пусть* $Z(f)\supset Z(g)$.
Тогда

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|}\leqslant \mathrm{const}\,\lambda^{C_0}(|z|),\quad z\in C^1,$$

где C_0 — *некоторое положительное число, не зависящее от* f *и* g.

Лемма 2. *Пусть* $f\in X_\lambda$ *и*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k.$$

Если Φ — *линейный, непрерывный функционал на* X_λ, *то имеет место равенство*

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to1-0}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\Phi(z^k)\rho^k.$$

Лемма 3. *Пусть* $\lambda\in\Omega$, *предположим, что* $f\in X_\lambda$, *тогда*

$$|f'(z)|\leqslant \mathrm{const}\,\lambda'(|z|).$$

Для доказательства этой леммы используются оценки С. Варшавского о конформных отображениях криволинейных полос (см. [6]).

Лемма 4. *Пусть* $f\in X_\lambda$, $\lambda\in\Omega$. *Предположим, что для производной функции* φ *выполняется оценка*

$$\varphi'(r)\leqslant \mathrm{const}(\varphi(r))^k,\quad r\in(0,+\infty),$$

где, как и прежде, $\varphi=\lg\lambda$, k — *положительное число. Тогда существуют положительные числа* $M=M(k,n)$ *и* $N=N(k,n)$ *такие, что*

$$\left|\frac{D^n(f)(z)}{f(z)}\right|\leqslant M(\varphi(|z|))^N,\quad n=0,\ 1,\dots\quad z\in C^1,$$

где $D(f)(z)=zf'(z)$.

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Обозначим через $E(f)$ замыкание в пространстве X_λ множества $\mathbf{P}f$, где $\mathbf{P}$ — совокупность всех многочленов от z. Предположим, что Φ — линейный непрерывный функционал на X_λ, ортогональный к $E(f)$.

По теореме Хана—Банаха для доказательства теоремы достаточно установить равенство

$$\Phi(1)=0.$$

Используя леммы 2 и 4, легко убедиться, что

$$\Phi(D^n f)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k k^n \Phi(z^k)=0, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

и потому для любого $P_n \in \mathrm{P}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P_n(k) a_k \Phi(z^k)=0.$$

Отсюда выводится, что

$$a_0 \Phi(1)=0.$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то $\Phi(1)=0$

3°. Пусть U—открытый единичный круг на комплексной плоскости и

$$\varphi_\varepsilon(z)=\left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2+\left|\frac{1+z}{1-z}\right|^{1-\varepsilon}, \quad z\in U, \ \varepsilon\in(0, 1).$$

Далее введем следующее пространство аналитических в U функций:

$$X_{\varphi_\varepsilon}=\{f, f\in A(U): |f(z)|\exp(-\varphi_\varepsilon(z))\to 0, \ z\to 1, \quad z\in U\}:$$

$$\|f\|_{X_{\varphi_\varepsilon}}=\sup_{z\in U} |f(z)|\exp(-\varphi_\varepsilon(z)).$$

Легко видеть, что X_{φ_ε}—банаховое пространство, $zX_{\varphi_\varepsilon}\subset X_{\varphi_\varepsilon}$, а функционалы $\Phi_\zeta(f)=f(\zeta)$, $f\in X_{\varphi_\varepsilon}$, $\zeta\in U$ непрерывны в пространстве X_{φ_ε}. Пусть

$$f(z)=\exp\left\{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right\}, \quad z\in U.$$

Очевидно, что f, $f^{-1}\in X_{\varphi_\varepsilon}$

Т е о р е м а 2. *Множество многочленов всюду плотно в пространстве* X_{φ_ε}. *В то же время*

$$\inf_{P\in P}\|Pf-1\|_{X_{\varphi_\varepsilon}}=C_0>0.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Թույլ հակադարձելիության մասին անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ տարածություններում

Դիցուք Λ-ն բավական արագ աճող ֆունկցիա է (0, +∞) *կիսաառանցքի վրա,* X_Λ*-ով նշանակենք այն ամբողջ ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց մոդուլը աճում է ավելի դանդաղ քան Λ-ն։*

Նշված տիպի Λ և λ, $(\Lambda(r)\geqslant\lambda(r))$ երկու ֆունկցիաների համար, հոդվածում գտնվում են պայմաններ, որոնց դեպքում յուրաքանչյուր $f\in X_\lambda$ $f(z)\neq 0$, $z\in C^1$ թույլ հակադարձելի է X_λ-տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. S. Shapiro*, Mich. Math. J., 11, 161—165 (1964). [2] *Н. К. Никольский*, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, т. 120 (1974). [3] *A. Shields*, Записки науч. семин., ЛОМИ АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 62 (1978). [4] *И. Ф. Красичков-Терновский*, Мат. сб., т. 102, № 2 (1977). [5] *И. Ф. Красичков-Терновский*, Мат. сб., т. 103, № 1 1977). [6] *С. О. Варшавский*, сб. перев., Математика, т. 2, № 4, (1958).