

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. А. Мкртчян

Вычисление некоторых интегралов от рациональных форм

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 7/IX 1981)

1°. Рассматривается вопрос о вычислении интегралов

$$I(F, R) = \int_{\Gamma} \frac{R dz}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}, \quad (1)$$

где R — многочлен от переменных $z_1, \dots, z_n$; $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$; $F = (f_1, \dots, f_n)$ — полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n$ (n -мерное комплексное аффинное пространство) в $\mathbb{C}^n$, имеющее только конечные нули в $\mathbb{C}P^n$ (n -мерное комплексное проективное пространство); $\Gamma = \{z = (z_1, \dots, z_n): z \in \mathbb{C}^n, |f_i(z)| = \epsilon_i, \epsilon_i > 0, i = 1, \dots, n\}$.

Вычисление интегралов типа (1) позволяет, в частности, найти сумму значений произвольного многочлена в корнях системы

$$f_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Соответствующие формулы для разных классов систем были получены в работах (1-4). Эти формулы позволяют исключать неизвестные из системы (2) по схеме, изложенной в (1), а также (5), (§21) (о первом применении этого метода в математической химии см. в (6)).

Другие результаты для вычисления интегралов типа (1) недавно получил А. П. Южаков.

2°. Обозначим через M множество отображений $P = (P_1, \dots, P_n)$, где все P_i — однородные многочлены, для которых $P^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{C}^n$ независимо от величин ненулевых коэффициентов многочленов P_i .

Предложение. Пусть $P = (P_1, \dots, P_n)$ отображает $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ и P_i — однородные многочлены, $i = 1, \dots, n$. Для того чтобы $P \in M$, необходимо и достаточно, чтобы (с точностью до перенумерации)

а) P_1 было мономом,

б) для любого набора $(i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq k \leq n$, существовало натуральное число $j(i_1, \dots, i_k)$ такое, чтобы сужение многочлена $P_{j(i_1, \dots, i_k)}$ на плоскости $z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0$ состояло только из одного монома, т. е.

$$P_{j(i_1, \dots, i_k)} = \varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k) + z_{i_1} P_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1) + \dots + z_{i_k} P_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_k),$$

где $\varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k)$ — моном, а множители при $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ или

однородные многочлены степени $\deg P_{j(i_1, \dots, i_k)} = 1$, или же тождественно равны нулю.

Для произвольного монома h запись $z_i \in h$ означает, что переменное z_i присутствует в мономе h с ненулевым показателем.

Определим множества $\sigma_0(P)$ и $\sigma(P)$ следующим образом:

$i_1, \dots, i_n \in \sigma_0(P)$, если $z_{i_1} \in P_1$ и $z_{i_e} \in \varphi_{j(i_1, \dots, i_{e-1})}(i_1, \dots, i_{e-1})$, $e=2, \dots, n$.

Множество $\sigma(P)$ получается из множества $\sigma_0(P)$ отождествлением элементов $(i_1, \dots, i_n)$ и $(e_1, \dots, e_n)$, для которых равны подстановки

$$\begin{pmatrix} j(i_1) & \dots & j(i_1, \dots, i_{n-1}) \\ \varphi_{j(i_1)}(i_1) & \dots & \varphi_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j(e_1) & \dots & j(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ \varphi_{j(e_1)}(e_1) & \dots & \varphi_{j(e_1, \dots, e_{n-1})}(e_1, \dots, e_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть в (2) $f_i = P_i + Q_i$, $i=1, \dots, n$, где P_i — однородные многочлены старшей степени ($\deg Q_i < \deg P_i$) и $P = (P_1, \dots, P_n) \in M$. Тогда

$$a) \quad I(F, R) = E(F, R)$$

$$E(F, R) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \sigma(P)} \sum_{|a| = a_1 + \dots + a_n} (-1)^a \mathfrak{M} \times \\ \times \left[\frac{R z_1 \dots z_n Q_1^{a_1} (g_{j(i_1)}(i_1))^{a_1} \dots (g_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}))^{a_{n-1}}}{P_1^{a_1+1} (\varphi_{j(i_1)}(i_1))^{a_1+1} \dots (\varphi_{j(i_1, \dots, i_{n-1})}(i_1, \dots, i_{n-1}))^{a_{n-1}+1}} \right],$$

где $g_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k) = f_{j(i_1, \dots, i_k)} - \varphi_{j(i_1, \dots, i_k)}(i_1, \dots, i_k)$, а $\mathfrak{M}$ — линейный функционал на многочленах Лорана, сопоставляющий каждому такому многочлену его свободный член;

б) число ненулевых слагаемых в правой части а) конечно.

3°. Рассмотрим полиномиальное отображение $H = (H_1, \dots, H_n) = (G_1 + D_1, \dots, G_n + D_n)$, где все G_i ($i=1, \dots, n$) — однородные многочлены и $\deg G_i > \deg D_i$. Пусть $G = (G_1, \dots, G_n)$ и $D = (D_1, \dots, D_n)$. Предполагается, что $G^{-1}(0) = \{0\} \in \mathbb{C}^n$. Это равносильно требованию об отсутствии бесконечно удаленных нулей у отображения H в $\mathbb{C}P^n$. Пусть матрица из однородных многочленов $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ такая, что отображение $G \cdot A \in M$, т. е. отображение HA такое, как в теореме 1. Предложение в пункте 2° и теорема Гильберта гарантируют существование матрицы A .

Теорема 2. $I(H, R) = E(HA, R \cdot \det A)$.

Для вычисления суммы значений произвольного многочлена в корнях системы (2) аналогичная формула получена в (1).

Заметим, что теорема 2 дает серию формул в зависимости от вида отображения GA . При практических вычислениях в разных ситуациях удобно применять ту или иную формулу.

В заключение автор выражает благодарность Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к работе, а также А. К. Циху за полезные обсуждения.

Որոշ ռացիոնալ ձևերի ինտեգրալների հաշվումը

Տրվում է քնածն հետևյալ տիպի ինտեգրալների հաշվման համար

$$\int_{\Gamma} \frac{Rdz}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}$$

Որտեղ՝ R -ը, $z_1, \dots, z_n$ կոմպլեքս փոփոխականներից կախված բազմանդամ $F=(f_1, \dots, f_n)$ -ը բազմանդամալին արտապատկերում է C^n -ը C^n -ի մեջ որն ունի միայն վերջավոր քանակությամբ զրոներ CP^n -ում;

$$dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

$$\Gamma = \{z = (z_1, \dots, z_n); z_i \in C^n; |f_i| = \varepsilon_i, \varepsilon_i > 0 (i = 1, \dots, n)\}:$$

Այդ տեսակի ինտեգրալների հաշվումը թույլ է տալիս գտնել կամայական բազմանդամի արժեքների գումարը $f_i(z) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ համակարգի զրոներում.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Л. А. Айзенберг, ДАН СССР, т. 234, № 3 (1977). ² Л. А. Айзенберг, А. К. Цих, Сиб. мат. журн., т. 20, № 4 (1979). ³ А. К. Цих, в кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, Красноярск, 1980. ⁴ А. П. Южаков, в кн.: Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980. ⁵ Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Наука, Новосибирск, 1979. ⁶ Л. А. Айзенберг, В. И. Быков и др., ДАН СССР, 257, № 4 (1981).