ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXIV 1982 4

УДК 62—50

МАТЕМАТИКА

С. В. Шахвердян

Методы оптимизации систем управления с ограничениями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Т. Адонцем 25/V 1981)

Для решения задач оптимизации систем управления с ограничением типа $g(x, t) \leqslant 0$ в настоящее время предлагается использовать методы интегральных штрафных функций (ИШФ) различных модификаций, идейно близкие к ним [1-3], где x — фазовый вектор; t — время. Однако исследования показали, что названные методы применимы лишь для учета ограничения вида $g(x, u, t) \leqslant 0$, где u — управляющий вектор. Учет ограничения типа $g(x, t) \leqslant 0$ организовать обычными методами ИШФ и их модификациями не представляется возможным, в силу чего необходимо ввести принципиальные дополнения.

Развивая работы [4,5], ниже предлагаем методы, позволяющие решить задачи оптимального управления с ограничением $g(x, t) \leqslant 0$. Кроме того, рассматриваются задачи оптимизации с ограничением на полное изменение скалярного и векторного управления.

Задача с фазовыми ограничениями. Пусть требуется минимизировать интеграл

$$I = \int_0^T f_0(x, u, t)\, dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = x^0, \quad x(T) = x^T; \tag{2}$$

$$a^0 \leqslant u \leqslant a^*; \tag{3}$$

$$g(x, t) \leqslant 0; \tag{4}$$

$$a^0 = (a_1^0, \ldots, a_m^0), \quad a^* = (a_1^*, \ldots, a_m^*),$$

где x—n-мерный фазовый вектор; u—m-мерный управляющий вектор; f—n-мерная вектор-функция; f_0, g—скалярные функции; a^0, a^*—m-мерные заданные векторы; T—период управления, заданная величина. Предполагается, что f_0, f, g непрерывные и непрерывно дифференцируемые необходимое число раз функции своих аргументов. Для простоты изложения предполагается также, что фазовая траектория один раз выходит на границу допустимой области и лежит на ней на интервале $[t_1, t_2]$.

Допустим, что ограничение (4) имеет порядок p, по определению равный [4,5]

$$p=\min_{j\in N}\left\{\frac{\partial g^{(j)}}{\partial u}\neq 0\right\},\quad N=\{0,\ldots,n\},\quad g^{(j)}\equiv\frac{d^j g}{dt^j}.$$

Тогда для того, чтобы фазовая траектория на интервале $[t_1, t_2]$ лежала на границе допустимой области, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$G(x,t_1)=(g^{(0)}(x,t_1),\ldots,g^{(p-1)}(x,t_1))=0; \tag{5}$$

$$G_j(x,t_2)=(g^{(j)}(x,t_2),\ldots,g^{(p-1)}(x,t_2))=0; \tag{6}$$

$$g^{(j)}(x,u,t)=0,\quad t\in[t_1,t_2], \tag{7}$$

где

$$j\in M=\{0,\ldots,p\},\quad p\neq 0,\quad \frac{\partial g^{(j)}}{\partial u}=0,\quad \forall j\in M\setminus P,$$

$$g^{(0)}(x,t)\equiv g(x,t),\quad G_p(x,t_2)\equiv 0.$$

Отметим, что в методе ИШФ и других аналогичных ему методах условия типа (5) и (6) отсутствуют, чем и обусловлена невозможность учета (4) с помощью этих методов.

Обозначим

$$\dot{x}_0=f_0(x,u,t),\quad x_0(0)=0,\quad x_0(T)=I; \tag{8}$$

$$R=(a^*-u)(u-a^0)-\gamma^2=0, \tag{9}$$

где γ — m-мерный дополнительный управляющий вектор, позволяющий учесть (3) в форме равенств (9).

Тогда задачу (1)—(4) можно сформулировать следующим образом: найти вектор-функции u и γ, которые минимизируют

$$I^*=I+\lambda G+\lambda_j G_j \tag{10}$$

при ограничениях (2), (7)—(9), где λ, λ_j—соответственно p и $p-j$ — —1-мерные векторы, определяемые из условия выполнения (5) и (6). Если в этой задаче применить метод ИШФ, то штрафная функция может быть введена с помощью следующего уравнения:

$$\dot{x}_{n+1}=\frac{1}{2}D(g)(g^{(j)})^2\equiv f_{n+1}(x,u,t),\quad j\in M \tag{11}$$

с граничными условиями

$$x_{n+1}(0)=0,\quad x_{n+1}(T)=\frac{1}{2}\int_0^T D(g)\,(g^{(j)})^2dt=0, \tag{12}$$

где

$$D(g)=\begin{cases}0, & \text{если } g\leqslant 0\\ 1, & \text{если } g>0.\end{cases}$$

Составим гамильтонову функцию

$$H=\psi^0 f^0+\nu R, \tag{13}$$

где $f^0=(f_0, \ldots, f_{n+1})$; $R=(R_1, \ldots, R_m)$; $\psi^0=(\psi_0, \ldots, \psi_{n+1})$ — $n+2$-мерный сопряженный вектор; $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_m)$—$m$-мерный неопределенный множитель. Здесь сопряженные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{\psi}_0=0, \quad \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \dot{\psi}_{n+1}=0, \quad i=\overline{1, n}, \tag{14}$$

а u и γ должны быть определены из системы

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial H}{\partial \gamma}=0. \tag{15}$$

Из второго уравнения (15) следует

$$\nu\gamma=0$$

или

$$\nu=0, \quad \gamma\neq 0; \quad \nu\neq 0, \quad \gamma=0; \quad \nu=0, \quad \gamma=0. \tag{16}$$

Условия (16) являются существенно слабыми, что обусловлено сведением неравенства (3) к равенству (9). Из-за слабости условий (16), как правило, возникают ситуации зацикливания итерационной процедуры, поэтому необходимо усилить (16). Можно доказать, что

$$\nu\begin{cases} \leqslant 0, & \gamma=0 \\ =0, & \gamma\neq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Хотя условия (17) известны из теоремы Куна—Таккера [6], однако в методе, основанном на замене (3) равенством (9), требование знакоопределенности ν отсутствует.

В моменты t_1, t_2 должны быть выполнены известные условия сопряжения [7]

$$\begin{aligned} &[\psi^- - \psi^+ - A]_\tau = 0; \\ &[H^- - H^+ + B]_\tau = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$;

$$A=\begin{cases} \lambda\dfrac{\partial G}{\partial x}, & \text{когда } \tau=t_1 \\ \lambda_j\dfrac{\partial G_j}{\partial x}, & \text{когда } \tau=t_2 \end{cases}; \quad B=\begin{cases} \lambda\dfrac{\partial G}{\partial t}, & \text{когда } \tau=t_1 \\ \lambda_j\dfrac{\partial G_j}{\partial t}, & \text{когда } \tau=t_2. \end{cases}$$

Здесь верхними индексами (—) и (+) обозначены значения ψ и H соответственно слева и справа от точек t_1 и t_2.

Ограничение (7) может быть учтено и с помощью метода множителей. Для этого из множества M выбирается j и составляется гамильтониан в виде

$$H=\psi^0 f^0+\mu_j D(g) g^{(j)}+\nu R, \quad j\in M, \tag{19}$$

где $\psi^0=(\psi_0, \ldots, \psi_n)$; $f^0=(f_0, \ldots, f_n)$; μ_j—множитель.

Отметим, что этот метод, имея ряд общих моментов с методом, рассмотренным в [5], отличается от него тем, что в [5] $\lambda_j\equiv 0$; вектор G имеет размерность $k\leqslant p$ и $D(g)=1$ $\forall t\in[0, T]$. В работе [4] для учета (4) рассмотрен вариант метода множителей при $j=p$.

Сопряженная система с помощью H, определяемым по (19), может быть записана в виде

$$\dot{\psi}_0=0, \quad \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad i=\overline{1, n}, \tag{20}$$

с условиями сопряжения, аналогичными условиям (18). Здесь условия (15)—(17) также остаются в силе.

Сравнив решения при j и $j+1$, нетрудно доказать, что справедливы условия

$$\psi_i^{(j)}=\psi_i^{(j+1)}+\mu_{j+1}\frac{\partial g^{(j)}}{\partial x_i}, \quad i=\overline{1, n}, \tag{21}$$

$$\mu_j=-\frac{d\mu_{j+1}}{dt}, \quad j=\overline{1, p}-1, \tag{22}$$

где $\psi_i^{(j)}$ и $\psi_i^{(j+1)}$ — решение системы (20) при вводе в рассмотрение соответственно $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$, а μ_j и μ_{j+1} — множители при $g^{(j)}$ и $g^{(j+1)}$.

Конкретные экспериментальные исследования на ряде примеров показали, что без ввода в рассмотрение равенств (5) и (6) условие $d=0$ не выполняется и $\min\|d\|\neq 0$, где $\|d\|$ — норма вектора $d=(\Delta x, x_{n+1}(T))$; $\Delta x\equiv x(T)-x^T$.

З а д а ч и с о г р а н и ч е н и е м на п о л н о е и з м е н е н и е у п р а в л е н и я. Пусть требуется минимизировать (1) при ограничениях (2) и

$$V_0^T u_j(t)=\sup\sum_{s=0}^{k-1}|u_j(t_{s+1})-u_j(t_s)|\leqslant\varepsilon, \tag{24}$$

где $V_0^T u_j(t)$ — полное изменение функции $u_j(t)$; k — число разбиения интервала $[0, T]$, ε — заданное число. Допустим, что $u_j(t)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную по t производную, тогда (24) можно заменить интегралом

$$V_0^T u_j(t)=\int_0^T|v_j|dt\leqslant\varepsilon, \quad \dot{u}_j=v_j\equiv f_{n+1}(v_j). \tag{25}$$

Неравенство (25) заменим равенствами

$$V_0^T u_j(t)-\varepsilon+\beta^2=0, \quad \dot{\beta}=0, \tag{26}$$

где β — неизвестный параметр. Интеграл (1) можно представить в виде

$$I^*=\int_0^T\left[f_0(x, u, t)+\lambda\left(|v_j|+\frac{1}{T}\beta^2\right)\right]dt-\varepsilon\lambda.$$

Используя обозначение (8), составим гамильтониан

$$H=\psi^0 f^0-\lambda\left(|v_j|+\frac{1}{T}\beta^2\right), \tag{27}$$

с помощью которого сопряженная система записывается в виде ($\lambda=\mathrm{const}$ — множитель)

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=\overline{0, n}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial u_j}, \quad \dot{\psi}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial \beta}. \qquad (28)$$

Из последнего уравнения (28), с учетом параметризации задачи, следует $\lambda\beta=0$, а из максимума (27) — $\partial H/\partial u_i=0$, $i=\overline{1, m}$, $i\neq j$ и

$$\frac{\partial H}{\partial v_j} = \psi_{n+1} - \lambda \operatorname{sign} v_j = 0. \qquad (29)$$

Если $\beta\neq 0$, то $\lambda=0$ и $\partial H/\partial u_j = 0$, $\forall t\in[0, T]$.

Если же $\beta=0$, $\lambda\neq 0$ и $\int\limits_0^T |v_j| dt = \varepsilon$, то

$$\psi_{n+1}(t) = \psi_{n+1}(t_s-0) - \int\limits_{t_s}^{t} \frac{\partial H}{\partial u_j} dt, \; t\in\tau_s; \qquad (30)$$

$$\begin{gathered}\psi_{n+1}(t_s-0) = \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s-0);\\ \psi_{n+1}(t_{s+1}+0) = \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1}+0); \qquad (31)\\ N\neq\varnothing, \quad |\psi_{n+1}| \begin{cases} \leqslant\lambda & \text{на } N \\ =\lambda & \text{на } M, \end{cases}\end{gathered}$$

где

$$N\equiv\left\{ t: v_j(t)=0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j}\neq 0\right\}\subset[0, T];$$

$$M_0\equiv\left\{ t: v_j(t)=0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j}=0\right\}\subset[0, T];$$

$$M_1\equiv\left\{ t: v_j(t)\neq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j}=0\right\}\subset[0, T];$$

$$M=M_0\cup M_1;$$

$\tau_s=[t_s, t_{s+1}]$—интеграл, на котором происходит непрерывное изменение $\psi_{n+1}(t)$ согласно (30); $s=0, 2, \ldots, e$; $t_0=0$, $t_{e+1}=T$. Неизвестные моменты t_s, $s=1, \ldots, e$ определяются из условия

$$\Omega_s = \begin{cases} \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1}+0) - \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s-0), & s=\overline{2, e}-2 \\ \lambda \operatorname{sign} v_j(t_{s+1}+0) - \psi_{n+1}(t_s), & s=0 \\ \psi_{n+1}(t_{s+1}) - \lambda \operatorname{sign} v_j(t_s-0), & s=e, \end{cases} \qquad (32)$$

где

$$\Omega_s \equiv -\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)^* dt, \; \left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)^* \equiv \left.\frac{\partial H}{\partial u_j}\right|_{v_j=0}.$$

$\psi_{n+1}(z)\neq 0$, когда $u_j(z)$ фиксировано, $\psi_{n+1}(z)=0$ в противном случае, $z=0, T$. Из (32) легко получить

$$|\Omega_s| \begin{cases} =2\lambda, & \text{если } s=2, 4, \ldots, e-2 \\ =\lambda, & \text{если } \psi_{n+1}(t_s)=0 \\ \leqslant\lambda, & \text{если } \psi_{n+1}(t_s)\neq 0 \end{cases} \Bigg\}, \; s=0, T. \qquad (33)$$

Если $M_0 \neq \varnothing$, то на M_0 $\operatorname{sign} v_i(t)$ не определен. Однако, учитывая (30), (31) и $\partial H/\partial u_i = 0$ на M_0, получим $\operatorname{sign} v_i(t) = \operatorname{sign} v_i(t_c - 0)$, где t_c—предельная слева точка M_0.

Теперь вместо (24) введем в рассмотрение ограничение

$$V_{0m}^T u(t) = \sup \sum_{s=0}^{h-1} \| u(t_{s+1}) - u(t_s) \| \leqslant \varepsilon, \tag{34}$$

где $V_{0m}^T u(t)$—полное изменение вектора $u(t)$ на $[0, T]$; $\|y\|$—норма вектора y.

Обозначим

$$\varphi = R - \|u\| = 0;$$

$$\dot{R} = v \equiv f_{n+1}(v).$$

Тогда, предполагая $R(t)$ непрерывным, выражение (34) можно представить в виде

$$V_{m0}^T u(t) = \int_0^T |v|\, dt \leqslant \varepsilon,$$

что может быть заменено равенством

$$V_{0m}^T u(t) - \varepsilon + \gamma^2 = 0, \quad \dot{\gamma} = 0,$$

где γ—дополнительный параметр. В этом случае сопряженная система записывается в виде

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial R}, \quad \dot{\psi}_{n+2} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma}, \tag{35}$$

а уравнения для определения u и v имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \psi^0 \frac{\partial f^0}{\partial u_i} + \mu(t) \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \psi_{n+1} - \lambda \operatorname{sign} v = 0,$$

где $H = \psi^0 f^0 + \mu(t)\varphi + \lambda \left(|v| + \frac{1}{T} \gamma^2 \right)$: $\mu(t)$ и $\lambda = \text{const}$—множители. Из последних двух уравнений (35) имеем

$$\dot{\psi}_{n+1} = \mu(t), \quad \lambda\gamma = 0,$$

откуда следует, что если $\gamma \neq 0$, $\lambda = 0$, то $\psi_{n+1}^* = \mu(t) = \partial H/\partial u_i = 0$ на $[0, T]$. Если же $\gamma = 0$, $\lambda \neq 0$, то, используя результаты, полученные выше, будем иметь

$$N \neq \varnothing, \quad |\psi_{n+1}| \begin{cases} < \lambda & \text{на } N \\ = \lambda & \text{на } M \end{cases},$$

$$R = \begin{cases} \text{const} & \text{на } N \\ \text{var} & \text{на } M \end{cases}, \qquad \mu(t) \begin{cases} \neq 0 & \text{на } N \\ = 0 & \text{на } M \end{cases}.$$

здесь N и M определяются по (31), где v_j должно быть заменено на v, а u_j на u_i, $i=\overline{1,m}$. Если в (32) Ω_s определить по выражению

$$\Omega_s \equiv -\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left(\frac{\partial H}{\partial R}\right)^* dt, \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial R}\right)^* \neq \left.\frac{\partial H}{\partial R}\right|_{v=0},$$

то условие (33) остается без изменений.

На $M_0 \neq \varnothing$ $\operatorname{sign} v(t) = \operatorname{sign} v(t_r - 0)$, что доказывается аналогично определению $\operatorname{sign} v_j(t)$ на M_0 при решении задачи с ограничением (24).

Филиал ВНИИАЭС

Ս. Վ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Սահմանափակումներով կառավարման համակարգերի օպտիմիզացման մեթոդներ

Անկախ այն բանից, թե որ մեթոդով է (4) սահմանափակումը հաշվի առնվում, (5) և (6) հավասարումների դիտարկումը պարտադիր է։ Կոնկրետ փորձնական հետազոտությունները ցույց են տվել, որ առանց (5) և (6) պայմանների ներմուծման հնարավոր չէ (4) սահմանափակման և փուլային հետագծի վրա դրված $\Delta x = x(T) - x^T = 0$ *և* $x_{n+1}(T) = 0$ *պայմանների համատեղ կատարումը, և ընդհանուր դեպքում* $\min \| d \| \neq 0$։ *Հենց այդ պատճառով է, որ ինտեգրալային տուգանային ֆունկցիաների մեթոդը և նրան անալոգ մեթոդները (4) սահմանափակումը հաշվի առնելու պրոբլեմը սկզբունքորեն չեն լուծում։*

Սկալյար և վեկտորական կառավարման ֆունկցիաների լրիվ փոփոխության վրա դրված սահմանափակումով օպտիմիզացման խնդրի լուծման արդյունքները հեշտությամբ ընդհանրացվում են (3) տիպի ստանդարտ սահմանափակման առկայության դեպքերի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Полак*, Численные методы оптимизации, «Мир», М., 1974. [2] *Е. С. Левитин Б. Т. Поляк*, ЖВМ и МФ, т. 6, № 5 (1966). [3] Методы оптимизации с приложениями к механизму космического полета. Под редакцией Дж. Лейтмана, М., Наука, 1965 [4] *А. Брайсон*, Хо-Ю Ши, Прикладная теория оптимального управления, Мир, М., 1972 [5] *А. С. Семенов, В. А. Троицкий*, ПММ, т. 34, вып 1 (1970). [6] *Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин* Численные методы в экстремальных задачах, «Наука» М., 1975. [7] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе Е. Ф Мишенко*, Математическая теория оптимальных процессоз, Наука, М., 1961